

SÉRIE A, N° 342.
N° D'ORDRE
1005.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR LE GRADE

DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

A. GUILLET

Agrégé des Sciences physiques
Préparateur au laboratoire des recherches physiques à la Sorbonne.
Professeur au Collège Chaptal.

1^{re} THÈSE. — DÉTERMINATION DIRECTE D'UN KILOHM ABSOLU

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 30 juin 1899, devant la Commission d'Examen.

MM. LIPPMANN, Président.

POINCARÉ,
DITTE, } Examineurs.

PARIS

GEORGES CARRÉ ET C NAUD, ÉDITEURS

3, RUE RACINE. 3

1899

SÉRIE A, N° 342.
N° D'ORDRE
1005.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR LE GRADE

DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

A. GUILLET

Agrégé des Sciences physiques
Préparateur au laboratoire des recherches physiques à la Sorbonne.
Professeur au Collège Chaptal.

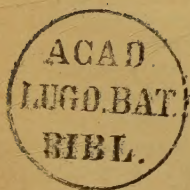
1^{re} THÈSE. — DÉTERMINATION DIRECTE D'UN KILOHM ABSOLU

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 30 juin 1899, devant la Commission d'Examen.

MM. LIPPMANN, Président.

POINCARÉ,
DITTE, } Examinateurs.



PARIS

GEORGES CARRÉ ET C. NAUD, ÉDITEURS

3, RUE RACINE, 3

1899

UNIVERSITÉ DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

MM.

Doyen	DARBOUX, Professeur . .	Géométrie supérieure.
Professeur honoraire.	HERMITE.	
	DE LACAZE-DUTHIERS .	Zoologie, Anatomie, Physiol. comparée.
	TROOST.	Chimie.
	LIPPMANN.	Physique.
	HAUTEFEUILLE.	Minéralogie.
	BOUTY	Physique.
	APPELL	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ	Physique mathématique et calcul des probabi- lités.
	PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Professeurs.	H. POINCARÉ	Astronomie mathéma- tique et Mécanique céleste.
	YVES DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiol. comparée.
	BONNIER	Botanique.
	DASTRE.	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS . . .	Géologie.
	GIARD.	Zoologie, Évolution des êtres organisés.
	WOLF.	Astronomie physique.
	KÖENIGS.	Mécanique physique et expérimentale.
	VÉLAIN.	Géographie physique.
	GOURSAT.	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	N.	Chimie organique.
Professeurs adjoints .	CHATIN.	Zoologie, Anatomie, Physiol. comparée.
	PELLAT.	Physique.
	PUISEUX	Mécanique et Astrono- mie.
Secrétaire	FOUSSEREAU.	

A MON MAITRE

M. G. LIPPMANN

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES

Bien modeste hommage de mon absolu dévouement.

DÉTERMINATION DIRECTE D'UN KILOHM ABSOLU

CHAPITRE PREMIER

HISTORIQUE

GÉNÉRALITÉS. — Un fil métallique ou une colonne de mercure représentent, à une température fixe, une *résistance électrique* déterminée.

L'étalon de Jacobi était constitué par un fil de cuivre rouge de 1 mm de diamètre et 1 m de longueur. Celui de Pouillet, repris par Siemens, par une colonne de mercure de 1 m de longueur et de 1 mm² de section.

Dans les systèmes de mesures électrostatiques et électromagnétiques, la mesure d'une résistance est définie par l'une des propriétés de cette grandeur.

En écrivant par exemple la loi d'Ohm sous la forme

$$rI = V, \quad (1)$$

la résistance *unité* doit être telle que, parcourue par le courant unité, ses extrémités présentent la différence de potentiel unité.

On peut déduire de (1) et des autres lois physiques, diverses propriétés de la résistance unité, équivalentes à la précédente au point de vue théorique.

Ainsi en multipliant les deux membres de (1) par $I t$ il vient :

$$r I^2 t = V I t.$$

La résistance unité est celle qui, traversée par le courant unité, en reçoit dans l'unité de temps, sous forme de chaleur, l'unité d'énergie.

Au point de vue expérimental, les méthodes qui fournissent le nombre r relatif à un conducteur donné, bien que théoriquement réductibles à un petit nombre de types, sont cependant distinctes par la nature du phénomène qui sert de base à la mesure et surtout par les moyens qui permettent d'éliminer les facteurs auxiliaires qu'il est difficile de connaître avec précision.

La résistance intervient :

1° dans la *distribution du potentiel* le long du circuit qu'elle constitue,

$$V = r I. \quad (1)$$

2° Dans la répartition de la chaleur le long du circuit :

$$V q = r I^2 t \quad \text{et} \quad Q_{\text{cal.}} = \frac{1}{J} r I^2 t. \quad (2)$$

3° Dans la *quantité d'électricité induite* par une modification quelconque d'un champ magnétique

$$q = \frac{1}{r} \int e dt = \frac{1}{r} \Phi. \quad (3)$$

Φ étant la modification active, souvent calculable, qui produit l'induction.

Toutes les méthodes qui permettent la mesure absolue d'une résistance sont déduites de ces trois *modes d'intervention* de la résistance dans les phénomènes électriques.

Les appareils de mesure à employer sont donc : l'électromètre, l'électrodynamomètre, le galvanomètre et le calorimètre.

On doit encore distinguer dans l'emploi des premiers appareils : la déviation statique, l'impulsion, la déviation permanente, produite par une série d'impulsions périodiquement communiquées à l'équipage mobile et enfin l'amortissement des oscillations de celui-ci.

La variété des procédés expérimentaux qui ont conduit à la mesure absolue d'une résistance donnée, s'explique donc par la variété des moyens électriques qui permettent d'appliquer des forces connues à l'équipage mobile des appareils de mesure, et par les combinaisons mécaniques auxquelles se prêtent ces diverses actions.

Les méthodes qu'il faut rechercher sont celles qui conduisent à équilibrer l'une par l'autre deux actions calculables de même nature : on les nomme méthodes de *zéro*. Il est possible alors d'employer des appareils différentiels *sensibles* puisqu'ils n'interviennent plus que par leur *qualité* ; la connaissance de leur constante devient inutile.

On doit aussi s'efforcer de réduire au minimum les mesures auxiliaires *déliçates*.

Quelle que soit la voie suivie, il y a dans la simplification une limite qu'il est théoriquement impossible de dépasser.

Les conventions qui fixent le système électromagnétique imposent en effet les *égalités numériques* suivantes :

$$m = l\sqrt{f}; \quad i = \sqrt{f}; \quad q = l\sqrt{f}; \quad e = l\sqrt{f}t^{-1}.$$

En conséquence, les formules (1), (2), (3) donnent toutes

$$r = lt^{-1}.$$

Donc on sera fatalement conduit à mesurer *au moins* une longueur et une durée.

Lorsque la méthode comporte des mesures auxiliaires quelconques, l'équation correspondante, résolue par rapport à r , doit se ramener toujours à

$$r = A\lambda t^{-1}.$$

A étant un facteur numérique indépendant des unités fondamentales.

Toutes les méthodes, sauf celle qui exige l'emploi du calorimètre, sont fondées sur les phénomènes d'induction. Elles se classent d'elles-mêmes en deux catégories : les unes utilisent des forces électromotrices constantes, les autres des forces électromotrices variables, généralement périodiques. Encore des forces électromotrices périodiques peuvent-elles se comporter comme des forces électromotrices constantes si elles ne deviennent actives qu'à l'instant où elles reprennent une même valeur (Maxwell).

D'éminents esprits accordent la préférence à l'emploi des courants continus, la résistance n'étant pas définie nettement lorsqu'il s'agit de courants alternatifs surtout si la fréquence est grande (Helmholtz) : l'électricité véhiculée ne conserve plus alors une densité constante dans toute l'étendue de la section du conducteur, elle se porte particulièrement à la périphérie. En outre l'intervention de la self-induction complique souvent la méthode.

Dans tous les cas, lorsque les circuits en expérience sont le siège d'un courant, il est bien difficile d'estimer la température *du fil* qui les constitue : la connaissance de la température ambiante ne suffit pas pour calculer, avec certitude, la correction de température relative à la résistance.

MÉTHODES APPLIQUÉES. — 1° *Méthode calorimétrique.*

— Joule (1866) a calculé r au moyen de la formule (2). Une boussole des tangentes donnait $i = \frac{H}{G} \operatorname{tg} \delta$; un calorimètre, renfermant la résistance à estimer, servait à la mesure des calories cédées Q pendant un temps t d'ailleurs connu :

$$Q = C (\theta - \theta_0).$$

M. Lippmann (1882), désirant rendre le calcul (2) indépendant de J , a proposé de conduire l'expérience de façon à céder successivement au calorimètre, placé dans les mêmes conditions : 1° la chaleur dégagée par le courant ; 2° celle qui équivaut à un travail mesurable ; on maintiendrait ainsi une même température stationnaire θ . En désignant par ri^2 et par $\mathcal{C}$ l'énergie cédée dans les deux cas au calorimètre, pendant l'unité de temps, on a évidemment

$$ri^2 = \mathcal{C}.$$

Le travail $\mathcal{C}$ pourrait être emprunté à la chute d'un poids ou à un moteur et mesuré alors au frein de Prony.

2° *Emploi des forces électromotrices constantes.* —

En 1873, Lorenz a utilisé la force électromotrice constante $\mathcal{E} = C\omega i$ qui se développe suivant le rayon d'un disque de cuivre tournant avec la vitesse angulaire ω , à l'intérieur d'une bobine plate dont le fil est parcouru par un courant d'intensité i . Le disque est parallèle au plan des spires et son axe, autour duquel s'effectue la rotation, coïncide avec l'axe de la bobine, Le courant qui alimente la bobine, traversant la résistance r à évaluer, les extrémités de celles-ci présentent

une différence de potentiel ri . On oppose l'une à l'autre les deux actions $C\omega i$ et ri et on établit l'équilibre par la variation graduelle de ω ou de r . Dans ces conditions on a

$$ri = C\omega i,$$

et par suite

$$r = C\omega.$$

On constate l'équilibre en intercalant sur le circuit de e un galvanoscope sensible.

Cette méthode présente deux inconvénients : d'abord le calcul de C est compliqué, puis la force électromotrice thermoélectrique, développée par le frottement des balais sur l'axe et la périphérie du disque, est importante par rapport à e . D'où une correction forte et d'ailleurs peu certaine.

En 1882, M. Lippmann a opposé à la différence de potentiel rI , la force électromotrice *maximum* e induite dans une bobine de surface totale S tournant à l'intérieur d'une seconde bobine, de longueur pratiquement infinie. En désignant par ω la vitesse angulaire, et par $4\pi n_1 I$ le champ inducteur, on a

$$e = 4\pi n_1 I S \omega = rI$$

donc

$$4\pi n_1 S \omega = r.$$

A la vérité, la force électromotrice induite est ici variable, mais elle se comporte comme si elle était constante, parce qu'elle n'agit qu'à l'instant où elle prend la valeur e .

Cette valeur est facile à calculer avec précision et peut être rendue incomparablement plus grande que celle obtenue au moyen du disque de Lorenz.

En substituant au champ de la longue bobine le champ terrestre, e est maximum au passage de la bobine tournante par le plan du méridien, la mesure de I n'est plus éliminée, la condition d'équilibre $rI = e$ donne alors

$$r = \frac{\omega S}{K \tan \alpha}$$

K étant la constante de la boussole et α la déviation de l'aiguille. La formule est indépendante de la valeur du champ inducteur H .

3° *Emploi des forces électromotrices variables.* — On peut faire servir de plusieurs manières par voie d'induction, un cadre sur lequel on a enroulé un fil, à la mesure de la résistance r de ce fil (W. Weber, 1851).

1° Le plan du cadre est par exemple perpendiculaire au plan du méridien magnétique. On le fait tourner brusquement d'une demi-circonférence autour de son diamètre vertical (ou horizontal) et on observe l'impulsion imprimée par le courant induit à l'aiguille d'un galvanomètre intercalé dans le circuit. La quantité d'électricité induite est $\frac{2SH}{R}$.

Elle a, d'autre part, pour mesure (théorie du galvanomètre balistique) $\frac{H}{g} \frac{T}{\pi} \alpha$; par suite

$$R = \frac{2gS\pi}{\alpha T}.$$

Weber, dans les expériences qu'il fit seul, ou en collaboration avec Zöllner (1880-1884), le cadre galvanométrique était circulaire et de grand rayon.

En 1874, Kohlrausch s'est servi d'un galvanomètre sensible, le calcul direct de g n'est plus alors possible; l'au-

teur l'a déduit de la différence d'amortissement des oscillations de l'aiguille, le circuit galvanométrique étant ouvert, puis fermé.

En 1884, M. Mascart a calculé ses expériences par la formule $R = 2S \frac{H}{h} g \frac{\pi}{T\theta}$, H et h étant les intensités du champ terrestre aux endroits où se trouvent placés le cadre et le galvanomètre; θ est l'impulsion de l'aiguille corrigée de l'amortissement.

Pour éliminer les facteurs H , h et g , l'auteur, dans une expérience auxiliaire, fait passer un même courant dans le cadre établi en boussole des tangentes, et dans le galvanomètre. En désignant par Δ et δ les déviations lues, on a

$$\frac{H}{G} \operatorname{tg} \Delta = \varphi \frac{h}{g} \operatorname{tg} \delta$$

φ est le pouvoir multiplicateur du shunt employé. Il vient finalement

$$R = GS \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \Delta} \frac{\pi}{T\theta} \times \frac{1}{\varphi}.$$

On est ainsi ramené au calcul de la constante G du grand cadre.

2° Le plan du cadre tourne autour du diamètre vertical (ou horizontal) avec une vitesse angulaire constante ω , il est alors le siège d'un courant variable dont il est facile de calculer la loi. Lorsque le courant change de sens, le plan du cadre occupe des positions telles que les couples électromagnétiques, successivement appliqués à une aiguille aimantée très courte suspendue au centre du cadre, tendent tous à faire tourner cette aiguille dans le même sens. Sous l'action du champ terrestre et du champ périodiquement variable produit par le cadre, l'aiguille

prend une position d'équilibre faisant avec sa position primitive un angle α . En écrivant que pour cette position le moment du couple terrestre et le moment moyen du couple électromagnétique sont égaux, on obtient une équation qui permet de calculer r .

$$r = \frac{GS\omega}{2 \operatorname{tg} \alpha} \left[1 + \frac{G}{S} \cdot \frac{M}{H} \sec \alpha - \frac{2L}{GS} \left(\frac{2L}{GS} - 1 \right) \operatorname{tg}^2 \alpha \right]$$

Cette méthode due à Sir William Thomson a été appliquée par Fleming Jenkins en 1863 ; reprise en 1881 par lord Rayleigh et Schuster, puis de nouveau par lord Rayleigh en 1882. Elle a été employée aussi par H. Weber en 1884.

On obtient ω avec précision par la méthode stroboscopique. Si l'équipage magnétique se comporte comme une aiguille très courte par rapport au rayon du cadre, qui était d'environ 15 cm, on calcule assez bien G , mais il est difficile d'obtenir L ; de plus la déviation α est seulement de quelques degrés et diverses causes perturbatrices (torsion du fil, mouvement de l'air à l'intérieur de la cage qui renferme l'aiguille, etc.) peuvent en affecter la valeur, et cela d'une manière mal connue.

3° Inversement on peut laisser le cadre fixe dans le plan du méridien magnétique et écarter *légèrement* de sa position d'équilibre, l'aiguille suspendue au centre du cadre. Lorsque le circuit du cadre est fermé, l'amortissement des oscillations de l'aiguille est plus grand qu'en circuit ouvert, le déplacement des pôles de l'aimant induit en effet un courant dans le cadre qui s'oppose au mouvement de l'aiguille.

L'étude du mouvement de l'aiguille, soumise à chaque instant à l'action du champ terrestre et du courant

qu'elle induit dans le cadre, donne en particulier la formule

$$r = \frac{G^2 M^2}{2 a m},$$

a désigne le moment d'inertie de l'aiguille et m un facteur calculé en écrivant que l'on passe d'une amplitude à la suivante en multipliant la première par e^{-mT} : les amplitudes successives peuvent être observées expérimentalement. La période d'oscillation est constante et a pour mesure T . En tenant compte de la self-induction du cadre, la formule (1) se complique (1).

La méthode d'amortissement imaginée par W. Weber a été appliquée par Dorn, Wild, H.-F. Weber, etc. ; elle est sujette à bien des critiques.

La première mesure absolue d'une résistance a été réalisée par Kirchoff en 1849 au moyen de l'induction mutuelle. Deux bobines semblables B et B' ayant leurs axes en coïncidence, faisaient partie d'un même circuit comprenant en outre une pile P et un galvanomètre G. La résistance R à évaluer, placée en dérivation, formait un premier circuit de résistance $R + r$ avec B' et G et un second circuit de résistance $R + r'$ avec B et P. En écrivant les lois d'Ohm relatives à l'état permanent et à l'état variable, produit par une rotation de 90° de l'une des bobines, on a

$$\begin{aligned} I'(R + r') - IR &= 0 \\ I(R + r) - I'R - E &= 0 \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} i'dt(R + r') - idtR - d[M(I + i) + L'(I' + i')] &= 0 \\ idt(R + r) - i'dtR - d[M(I' + i') + L(I + i)] &= 0 \end{aligned}$$

(1) Voir G. LIPPMANN, *Unités électriques absolues*. MASCART et JOUBERT. *Électricité et Magnétisme*.

i et i' désignent les variations des deux courants, et L, L', M leurs coefficients de self et de mutuelle induction. En intégrant il vient :

$$\begin{aligned} q'(R+r') - qR - MI &= 0 \\ q(R+r) - q'R - M'I &= 0 \end{aligned}$$

q et q' étant les quantités d'électricité induite. En résolvant ces dernières équations par rapport à q' on a :

$$q' = \frac{M}{R} \frac{(R+r)(R+r') + R^2}{(R+r)(R+r') - R^2} \cdot I.$$

La quantité d'électricité q' en traversant le galvanomètre G communique à l'aiguille une impulsion α ; d'autre part le courant I' fait prendre à l'aiguille une déviation permanente δ . En conséquence

$$\frac{q'}{I'} = \frac{\alpha T}{\pi \operatorname{tg} \delta} = \frac{M}{R} \frac{(R+r)(R+r') + R^2}{(R+r)(R+r') - R^2}.$$

Si l'on choisit les résistances r et r' très grandes par rapport à R , le coefficient de $\frac{M}{R}$ peut être développé en une série très convergente de laquelle on déduit

$$R = M \frac{\pi}{T} \frac{\operatorname{tg} \delta}{\alpha} \left[1 + \frac{2R^2}{rr' + R(r+r')} + \dots \right]$$

ou encore avec une approximation moindre

$$R = M \frac{\pi}{T} \frac{\operatorname{tg} \delta}{\alpha}.$$

La méthode d'induction mutuelle a été appliquée par Roïti, par Himstedt, par Mascart, ... etc.

Pour substituer à l'observation de l'impulsion α une déviation permanente α , Roïti (1884) laisse les deux bobines fixes et coupe le courant n fois par seconde, le

galvanomètre recevant l'électricité induite seulement à l'établissement ou bien à la suppression du courant.

Il vient alors

$$i_1 = nm_1 = \frac{h}{g} \operatorname{tg} \alpha.$$

En arrêtant le commutateur la déviation devient δ et l'on a

$$I_1 = \frac{h}{g} \operatorname{tg} \delta.$$

Comme au degré d'approximation adopté

$$\frac{i_1}{I_1} = \frac{M}{R},$$

on a

$$R = nM \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Dans les expériences de Himstedt (1885) les deux circuits B et B' sont distincts; B comprend la bobine inductrice, un interrupteur, la pile et une dérivation extérieure à la pile et à la bobine formée de deux fils ayant pour résistances r et w_0 ; B' comprend un interrupteur, le galvanomètre, et un fil de résistance r , on règle la résistance w_1 de ce circuit de manière à satisfaire à la condition $w_1 = r + w_0$.

En interrompant le circuit principal n fois par seconde et réglant les interrupteurs de manière à admettre dans le galvanomètre seulement les courants d'ouverture (ou de fermeture) on a, si α_1 est la déviation permanente observée

$$G \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{niM}{w_1}. \quad (1)$$

En fermant d'autre part le circuit principal d'une

manière durable après avoir remplacé w_0 par le circuit secondaire d'où l'on a supprimé la résistance r , le courant constant reprendra la valeur i et l'on aura

$$G \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{ri}{w_1} \quad (2)$$

α_2 étant la nouvelle déviation observée. En éliminant i entre les équations (1) et (2) il vient

$$r = nM \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1}$$

M. Mascart (1884) s'est servi de l'induction mutuelle relative à deux cadres concentriques produite par une seule inversion du courant inducteur. On a alors pour la résistance du circuit induit

$$R = 2Ml \frac{g}{h} \frac{\pi}{\theta l}.$$

Une boussole des tangentes donne $I = \frac{h'}{g'} \operatorname{tg} \alpha$.

En observant les déviations δ et δ' communiquées aux aiguilles : 1° de la boussole des tangentes, 2° du galvanomètre balistique on peut éliminer le rapport $\frac{gh'}{g'h}$ qui est peu accessible au calcul. Finalement on a

$$R = 2M \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \delta'} \frac{\pi}{\theta l} \operatorname{tg} \alpha.$$

C'est aussi au groupe des méthodes fondées sur l'induction mutuelle qu'appartient celle que j'ai appliquée. C'est une méthode de zéro, il n'y a donc aucune déviation à observer.

Elle procède de la méthode de Kirchoff et d'une méthode due à M. Lippmann ayant pour objet la détermination d'un étalon électrique de temps.

DATE	OBSERVATEUR	VALEUR DE L'OHM en colonne de mercure.
<i>Méthode calorimétrique.</i>		
1866	Joule	106, 22
1867	Joule	106, 10
1877	H.-F. Weber	105, 88
1885	Flechter	105, 95
<i>Induction dans un cadre par une rotation de 180°.</i>		
1874	F. Kohlrausch	105, 91
1884	Mascart, de Nerville et Benoit	106, 37
1884	G. Wiedmann	106, 19
<i>Décharge induite par un courant.</i>		
1878	Rowland	106, 16
1882	Glazebrook	106, 29
1883	Kimball	106, 25
1884	Mascart, de Nerville et Benoit	106, 30
1884	H.-F. Weber	105, 37
1884	Rowland et Kimball	106, 31
<i>Courant moyen d'une série de décharges induites.</i>		
1884	Roiti	105, 89
1885	Himstedt	105, 98
1899	Guillet	106, 21
<i>Amortissement des aimants.</i>		
1882	Dorn	105, 46
1884	Wild	106, 03
1884	H.-F. Weber	105, 26
1884	Baillé	105, 67
<i>Action moyenne du courant induit dans un cadre tournant.</i>		
1865	Comité de l'Association britannique	104, 83
1881	L. Rayleigh et Schuster	105, 95
1882	L. Rayleigh	106, 25
1882	H.-F. Weber	106, 16

DATE	OBSERVATEUR	VALEUR DE L'OHM en colonne de mercure.
<i>Courant d'induction continu.</i>		
1873	Lorenz	107,10
1883	L. Rayleigh et M ^{rs} Sidgwich	106,22
1884	Lorenz	106,19
1884	Lorenz	106,13
1884	Rowland, Kimball et Duncan.	106,29
1885	Lenz	105,93
1889	Lippmann et Vuilleumier.	106,27

Ce tableau résume les résultats fournis par l'application des méthodes exposées plus haut.

CHAPITRE II

PRINCIPE DE LA MÉTHODE

Dans le but d'établir un étalon électrique de temps M. Lippmann a imaginé la méthode suivante ⁽¹⁾ :

Une pile de force électromotrice E actionne en même temps les deux circuits antagonistes d'un galvanomètre Thomson monté en différentiel. Le premier circuit, de résistance R , est le siège d'un courant continu ; dans le second circuit la pile envoie une série discontinue de décharges obtenues en chargeant périodiquement, à l'aide de la pile, un condensateur de capacité C que l'on décharge ensuite à travers ledit circuit.

L'aiguille du galvanomètre reste en équilibre si les deux courants débitent des quantités d'électricité égales pendant un temps τ .

Soit t l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux décharges, l'équation d'équilibre est :

$$t = CR. \quad (1)$$

La seconde étant prise pour unité de temps, et n désignant le nombre des décharges envoyées au galva-

(1) G. LIPPMANN. — Sur une unité de temps absolue (*C. R. A. S.* 1887).

nomètre en une seconde, l'équation d'équilibre devient

$$\frac{1}{n} = cv^{-2} R \quad (2)$$

si c mesure la capacité du condensateur en unités électrostatiques.

M. Abraham a appliqué sous cette forme la méthode de M. Lippmann dans le but de déterminer le rapport ν ⁽¹⁾.

Si l'on veut simplement utiliser la méthode au point de vue tachymétrique, comme l'a fait M. Limb ⁽²⁾, il suffit d'agir, au moyen d'un frein, sur l'axe dont on veut maintenir la vitesse angulaire constante, de façon à empêcher tout mouvement de l'aiguille du galvanomètre.

Il est clair que le condensateur peut être remplacé par tout système fournissant périodiquement une même quantité d'électricité. Si par exemple un interrupteur quelconque établit et supprime n fois par seconde un courant dans un circuit de résistance R_1 comprenant une bobine, un cadre entourant la bobine recevra par seconde $2n$ charges induites. En les dirigeant dans l'une des bobines d'un galvanomètre Thomson dont l'autre bobine fait partie du circuit de résistance R parcouru par un courant compensateur, l'équation d'équilibre (2) devient

$$\frac{2nL_m}{R_2R_1} = \frac{1}{R} \quad (3)$$

les bobines sont supposées ici électromagnétiquement

(1) Sur une nouvelle détermination du rapport ν (thèse de doctorat 1892).

(2) Méthode pour la mesure directe des forces électromotrices en valeur absolue (C. R. A. S. 1894).

équivalentes et L_m désigne le potentiel mutuel des deux bobines.

La formule suppose que l'on utilise l'induction à l'établissement et à la suppression du courant.

Sous cette forme la méthode de M. Lippmann se prête soit à la mesure d'un potentiel mutuel L_m , une résistance R ou R_1 étant connue ⁽¹⁾, soit à la détermination d'une grande résistance en valeur absolue.

Principe de la méthode. — Dans un travail réalisé en 1892 ⁽²⁾, et que j'ai repris récemment, je me suis proposé de mesurer directement une grande résistance en valeur absolue.

Voici en principe le dispositif adopté :

La bobine B (fig. 1) de section s et portant n_1 spires par centimètre, est traversée par un courant d'intensité I ; elle produirait, si elle était de longueur infinie un champ cylindrique uniforme d'intensité

$$4\pi n_1 I$$

Un cadre C portant N spires entoure la bobine. Le flux embrassé par ce cadre a pour expression

$$\mathfrak{F} = 4\pi n_1 I N s.$$

La quantité d'électricité induite dans le cadre par l'établissement ou la suppression du courant I a pour valeur

$$\frac{4\pi n_1 I N s}{R_2} = \frac{L_m I}{R_2}$$

⁽¹⁾ H. ABRAHAM. — *Journal de Physique* (avril 1894).

⁽²⁾ Voir C. R. des travaux (école des hautes études).

R_2 mesure la résistance totale du circuit induit et $L_m = 4\pi n_1 N s$ le potentiel mutuel des deux circuits.

Correction des bouts. — Pour que tout se passe comme si la bobine inductrice était infiniment longue,

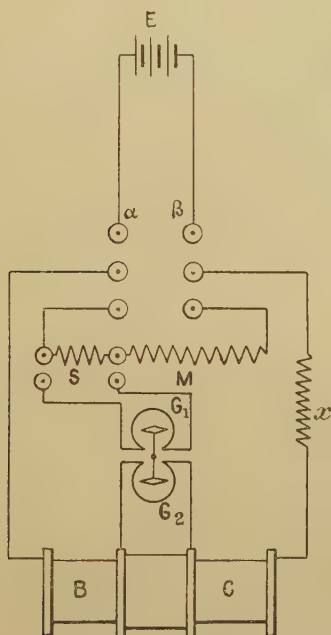


Fig. 1.

il suffit de serier avec le cadre central d'autres cadres identiques placés dans l'axe du système précédent et distants les uns des autres d'une longueur égale à celle de la bobine inductrice.

En effet, pour corriger l'effet d'induction sur le cadre central il faudrait, d'après la méthode indiquée par

M. Lippmann ⁽¹⁾, faire subir à la bobine inductrice finie une série de translations égales à sa propre longueur et ajouter les décharges induites à la première.

Il m'a paru préférable, dans le cas actuel, de supprimer la correction, ou plutôt de la rendre plus expéditive, par l'emploi des bobines sériées.

Explicitons R_2 et I : la résistance du circuit induit comprend nécessairement la résistance B de q cerceaux sériés, la résistance G_2 de la bobine du galvanomètre Thomson qui reçoit les décharges et celle j' des fils de jonction. Ainsi

$$R_2 = B + G_2 + j' \text{ (circuit induit).}$$

D'autre part

$$I = \frac{V}{R_1}$$

R_1 étant la résistance du circuit inducteur et V la différence de potentiel entre les deux points d'attache α , β (fig. 1).

Remarquons que l'on a

$$R_1 = b + x + j \text{ (circuit inducteur)}$$

b étant la résistance de la bobine inductrice, x la résistance à estimer en valeur absolue et j celle des conducteurs de jonction.

La décharge a donc finalement pour expression

$$Q = \frac{L_m V}{R_1 R_2}.$$

En utilisant les quantités d'électricité induites à l'éta-

(1) *C. R. A. S.* 1887. G. LIPPMANN. Correction expérimentale des bouts.

blissement et à la suppression du courant inducteur I , on double l'effet.

Le commutateur est construit de manière à établir et à supprimer deux fois par tour le courant inducteur. Si donc il fait ν_1 tours par seconde, la quantité d'électricité lancée dans la bobine G_2 par seconde est

$$Q_1 = \frac{4L_m\nu_1 V}{R_1 R_2}.$$

Dans la seconde bobine de résistance G_1 , faisons passer un courant compensateur. Pour cela, plaçons sur les bornes $\alpha \beta$ une très grande résistance fixe M , complétée si l'on veut par une résistance modifiable S , et disposons G_1 en dérivation sur S (fig. 1). La bobine G_1 est alors traversée par le courant

$$I_1 = \frac{S}{S + G_1} I.$$

D'autre part tout se passe comme si l'on branchait sur $\alpha \beta$ la résistance

$$\mathcal{R} = M + \frac{S G_1}{S + G_1}$$

donc

$$I = \frac{V'}{M + \frac{S G_1}{S + G_1}}$$

et par suite

$$I_1 = \frac{S}{S + G_1} \frac{V'}{M + \frac{S G_1}{S + G_1}}.$$

En employant un galvanomètre à bobines correctrices, on peut régler l'appareil de façon que l'aiguille reste au zéro lorsque le même courant passe en sens inverse dans les bobines G_1 et G_2 .

L'équation d'équilibre électromagnétique est alors

$$Q_1 = I_1 \quad (I)$$

ou

$$\frac{4L_m \nu_1 V}{R_1 R_2} = \frac{S}{S + G_1} \cdot \frac{V'}{\mathfrak{R}}$$

$\mathfrak{R}$ mesure la résistance d'ensemble du circuit relatif à la compensation.

Correction relative à la coupure périodique de l'inducteur. — Si les circuits inducteur et de compensation étaient en permanence sur les bornes $\alpha\beta$, on aurait

$$V' = V.$$

Mais comme le circuit inducteur est périodiquement coupé, la valeur de V' est tantôt égale à V et tantôt égale à V_1 . En désignant par f la fraction du temps pris pour unité, la période du commutateur quel qu'il soit, pendant laquelle les circuits inducteur et de compensation sont simultanément actifs, on peut dire que tout se passe comme si le circuit compensateur était alimenté par une force électromotrice constante

$$V' = fV + (1 - f) V_1$$

En mesurant directement le rapport $\frac{V_1}{V} = b$, on obtient :

$$V' = [f + b (1 - f)] V.$$

La valeur de f dépend de la nature et de la construction du commutateur employé.

Il est facile de calculer V et V_1 , mais, au point de vue expérimental, il est préférable de mettre V' sous la forme précédente.

En désignant par E la force électromotrice de la batterie d'accumulateurs qui fournit le courant et par ρ la résistance intérieure de cette batterie et des fils d'amener en α et β . On a

$$V = E - \rho i; \quad V_1 = E - \rho i_1$$

i et i_1 mesurent les intensités du courant total lorsque les deux circuits considérés sont alimentés ou seulement le circuit de compensation. Dans le premier cas la résistance fixée sur $\alpha \beta$ a pour valeur

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{R} R_1}{\mathcal{R} + R_1}$$

Les valeurs de i et i_1 sont par suite

$$i = \frac{E}{\mathcal{R} + \rho}; \quad i_1 = \frac{E}{\mathcal{R} + \rho}$$

et l'on a

$$V = E \left(1 - \frac{\rho}{\mathcal{R} + \rho} \right); \quad V_1 = E \left(1 - \frac{\rho}{\mathcal{R} + \rho} \right)$$

Ces formules servent aux corrections..

Equation complète exprimant l'équilibre. — Si le galvanomètre est dépourvu de bobines correctrices, ou si l'on désire s'affranchir du réglage laborieux qu'elles exigent, il faut tenir compte du rapport des effets électromagnétiques des deux bobines G_1, G_2 .

Supposons le courant qui passe dans G_2 p fois plus faible que le courant passant dans G_1 qu'il équilibre l'équation (1) devient

$$pQ_1 = I_1$$

ou

$$p \frac{4L_m v_1 V}{R_1 R_2} = \frac{S}{S + G_1} \cdot \frac{1}{\mathcal{R}} \cdot (f + b(1 - f)) V$$

On a donc finalement :

$$R_1 = 4pLm\nu_1 \frac{\mathfrak{R}}{R_2} \left(1 + \frac{G_1}{S_1}\right) \frac{1}{f + b(1-f)}$$

En posant

$$r_1 = \frac{\mathfrak{R}}{R_2}, \quad \gamma_1 = \frac{G_1}{S_1}$$

et

$$\varphi_1 = \frac{1}{f + b(1-f)}$$

il vient

$$R_1 = 4pLm\nu_1 r_1 (1 + \gamma_1) \varphi_1. \quad (1)$$

Elimination du rapport p. — Pour n'avoir pas à déterminer directement le coefficient p , qui dépend de la position qu'occupe l'équipage magnétique par rapport aux bobines G_1 et G_2 , et pour éliminer divers effets provenant d'une dissymétrie de construction, il est bon de grouper les données de deux équilibres consécutifs. Au premier équilibre correspond l'équation (1), on échange alors les rôles des galvanomètres G_1 et G_2 et un second équilibre donne

$$R_1 = 4 \frac{1}{p} Lm\nu'_1 r_2 (1 + \gamma_2) \varphi_2. \quad (2)$$

En multipliant membre à membre les équations (1) et (2) il vient enfin :

$$R_1 = 4Lm\sqrt{\nu_1\nu'_1 \cdot r_1 r_2 \cdot (1 + \gamma_1)(1 + \gamma_2) \cdot \varphi_1 \varphi_2}. \quad (I)$$

Remarque. — Les équations qui définissent les intensités des courants induit et inducteur en fonction du temps montrent que la self induction des circuits n'intervient pas, si ce n'est bien entendu dans la durée de la phase variable.

Mesures à effectuer. — Le calcul de R_1 exige donc la détermination expérimentale préalable :

1° Des nombres de périodes ν_1, ν_1' effectuées en une seconde par le commutateur dans les deux équilibres groupés ;

2° Des quatre rapports de résistances $r_1, \gamma_1 ; r_2, \gamma_2$;

3° Du potentiel mutuel L_m des deux circuits, effectué plusieurs fois au cours des recherches.

4° Des rapports f et b qui intéressent le facteur correctif φ .

Les rapports peuvent être obtenus avec une grande précision ; la détermination précise des valeurs ν et L_m présente plus de difficultés.

Chaque série comprend deux groupes de mesures obtenues, le premier en intercalant la longue bobine dans le circuit inducteur et le second en intercalant les petites bobines dans le circuit inducteur.

Des commutateurs permettent d'échanger, par renversement de leurs cavaliers, les *parties actives* des circuits inducteur et induit.

Il faut éviter soigneusement la présence du fer dans le voisinage des circuits car son aimantation, sous l'action du courant inducteur, contribuerait à l'induction et la formule (I) cesserait d'être applicable.

Des thermomètres placés en divers points du circuit doivent être fréquemment observés.

Valeur de K. — La résistance R_1 connue en unités absolues se compose de la boîte K (fig. 5) et du circuit A. Pour obtenir K on mesure le rapport

$$\frac{K}{K + A} = \lambda$$

et l'on a

$$K = \lambda R_1.$$

La résistance R_1' relative au second circuit fournit de même

$$K = \lambda' R_1'.$$

L'ensemble des mesures relatives à une série complète exige une journée et le calcul des résultats un temps à peu près égal, mais tout se fait avec précision et commodité en disposant les appareils comme il est expliqué plus loin.

CHAPITRE III

DESCRIPTION DES APPAREILS

Système inducteur. — Le système inducteur comprend :

1° Une bobine *b* ayant environ 10 cm de diamètre et 70 cm de longueur. Le fil qui la recouvre suit un sillon en hélice tracé sur un cylindre d'ébonite, cette hélice fait sensiblement 22 pas par centimètre ;

2° Une série B de sept bobines identiques entre elles portant chacune 200 spires, enroulées sur gorge hélicoïdale et occupant sur la génératrice une longueur d'environ 9 cm.

La distance qui sépare deux bobines consécutives de la série est de 70 cm.

Le noyau de la bobine principale est composé de deux demi-cylindres égaux adaptés l'un en regard de l'autre sur le milieu de la bobine *b*. entièrement construite, on monte le système sur le tour et on procède à l'enroulement.

Les extrémités du fil de chacune des bobines B sont fixées à des bornes *aa* au moyen desquelles on effectue les groupements nécessaires.

En réalité ayant vérifié, par des comptages répétés au viseur, le nombre des spires enroulées, partagées au

préalable en dix groupes, j'ai trouvé les résultats suivants : $B_0 = 200$, $B_1 = 200$, $B_2 = 199$, $B_3 = 200$, $B_4 = 199$, $B_5 = 200$, $B_6 = 201$.

Commutateurs. — 1° Le commutateur tournant, monté sur un socle de fonte de 25 cm de long et 20 cm de large, se compose de deux pièces identiques I, II (fig. 2)

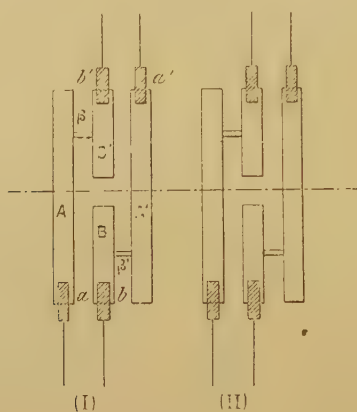


Fig. 2.

solidaires d'un même axe de rotation en acier supporté par deux paliers graisseurs *pp*.

La pièce I est constituée par trois bagues de laiton fixées sur un anneau d'ébonite de 94 mm de diamètre et de 45 mm d'épaisseur. Les bagues A et A' sont continues, la troisième, sertie dans l'ébonite, présente deux interruptions opposées : les parties conductrices ont environ 106 mm de longueur et les parties isolantes environ 42 mm.

Des balais *a*, *a'*, *b*, *b'*, engagés sous des bornes fixées à des colonnettes d'ébonite, permettent d'intercaler les bagues dans les circuits intéressés.

Les traverses métalliques β et β' rendent électriquement solidaires les anneaux A et B' d'une part, A' et B d'autre part.

J'ai utilisé, soit des balais frottants formés par une lame de laiton, soit des balais roulants constitués par une petite roue r en bronze d'aluminium montée sur un axe d'acier tournant dans une fourche f placée à

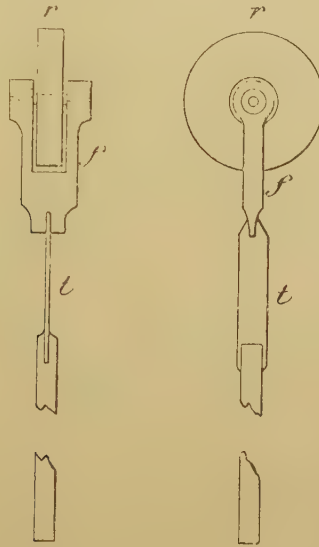


Fig. 3.

l'extrémité d'une tige t (fig. 3), soit enfin des balais formés par un faisceau de fils de cuivre.

Le commutateur reçoit son mouvement d'un moteur électrique à écran magnétique (fig. 8) ⁽¹⁾ par l'intermédiaire d'une sorte de *joint Raffard* formant volant :

⁽¹⁾ Ce moteur, établi d'après le plan de l'ingénieur-conseil Limb, docteur ès sciences, m'a été obligeamment prêté par la maison Gindré frères,

deux plateaux de fonte sont calés en regard, l'un P (33 cm de diamètre) sur l'axe du moteur, l'autre P' (19 cm de diamètre) sur celui du commutateur ; ils portent respectivement six bras tels que b, b' , espacés de 10 cm et distribués aux sommets d'un hexagone. Ces bras sont rendus relativement solidaires par des anneaux de caoutchouc.

En calant sur l'axe, sous un angle convenable, les deux cylindres I, II, le galvanomètre reçoit dans le même sens, la totalité des charges induites.

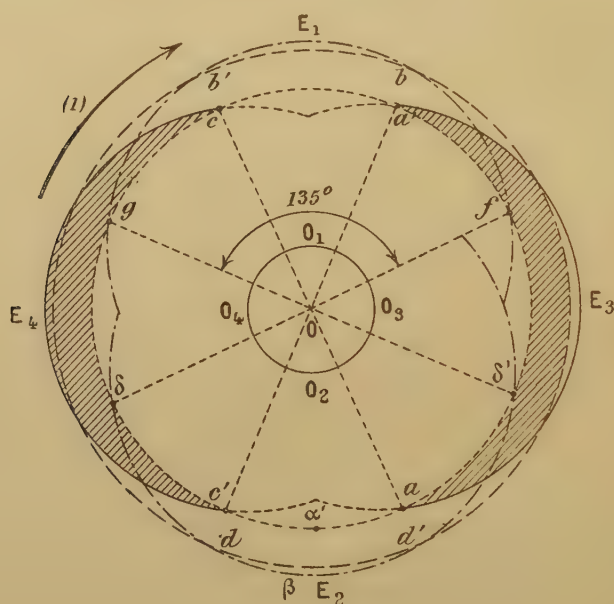


Fig. 4.

2° Désirant substituer les contacts *plongeants* aux contacts *frottants*, j'ai imaginé un petit commutateur, d'une construction économique et simple (fig. 4).

Sur un cylindre de bois, qu'une vis de serrage permet de fixer à l'axe du moteur, sont calés quatre paires d'excentriques E_1, E_2, E_3, E_4 . Ces excentriques commandent respectivement les lames ressorts $e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, e_4, e_4$, reliées aux bornes $b_1, b_1; b_2, b_2; b_3, b_3; b_4, b_4$.

Les vibrations des balais sont ainsi rendues impossibles.

Chacune des lames est munie à son extrémité libre d'une tige d'argent c périodiquement abaissée par le jeu de l'excentrique. Le contact c touche pendant le temps nécessaire, au mercure qui contient un godet de verre g placé au-dessous de lui; pour éviter toute *pulvérisation* du mercure, il faut employer de larges godets.

Les groupes d'excentriques E_1, E_2 sont opposés; les groupes E_3, E_4 sont aussi à 180° l'un de l'autre, et respectivement à 90° de E_1 et de E_2 .

Le fonctionnement du commutateur est facile à suivre : Soient α et β les projections des contacts qui commandent respectivement les circuits induit et inducteur. Pendant que l'arc $E_2 d'$ défile devant β , le courant inducteur (2) est seul fermé, puis les circuits inducteur (2) et induit (3) sont simultanément fermés pendant le passage des éléments de profil $d'\delta', ae$, le circuit inducteur (2) s'ouvre au passage de δ' , le circuit (3) reçoit alors l'électricité induite par la suppression du courant (2). L'induit (3) reste seul fermé pendant le passage de ef . Lorsque f arrive en β , l'inducteur (1) s'établit, le circuit (3) reçoit donc l'électricité induite par l'établissement de (1). Au passage de a' l'induit (3) s'ouvre et (1) continue à être fermé jusqu'à l'arrivée de g en β ; comme le point c précède l'arrivée de g , le circuit (4) se ferme avant que le courant inducteur soit interrompu, le circuit (4) reçoit par suite l'électricité

induite par la suppression de (1). Enfin le circuit (4) reste fermé de c en c' , il reçoit donc l'électricité induite à l'établissement de (2).

En résumé, le circuit (3) conduit au galvanomètre les quantités d'électricité induites par la suppression du courant (2) et par l'établissement du courant (1), tandis que le circuit (4) y conduit l'électricité induite à l'établissement de (2) et à la suppression de (1).

Il est facile, en établissant les connexions de s'assurer : 1° que les courants (1) et (2) traversent la bobine en sens opposés ; 2° que les circuits (3) et (4) diffèrent simplement par l'échange des points d'entrée et de sortie. Les divers courants induits par tour agissent par suite dans le même sens sur l'aiguille du galvanomètre.

Résistance (K) (fig. 5). — J'ai composé la résistance K de dix bobines ayant chacune cent ohms environ. Le fil de maillechort employé ($\text{diam} = \frac{63}{100}$) est bien isolé et enroulé en double sur des tubes de laiton, d'abord recouverts par une triple gaine de soie. Les bobines sont fixées à une épaisse planche d'ébonite PP et distribuées en deux rangées de 5. Les extrémités de chacune des bobines sont solidaires de godets à mercure distincts (numérotés 1, 1 ; 2, 2 ; 3, 3 ; ... 10, 10).

Deux traverses de laiton cc portant des cavités $g_1, g_2 \dots g_{10}$ permettent de grouper en série ou en dérivation, entre deux points, la totalité ou une partie seulement des bobines.

La planche PP ferme une auge étanche rectangulaire EE', destinée à recevoir un pétrole, et repose sur les appuis s portés par une seconde auge de zinc EE munie de poignées MM.

Un courant d'eau peut circuler de a en d dans l'espace limité par les surfaces E, E' .

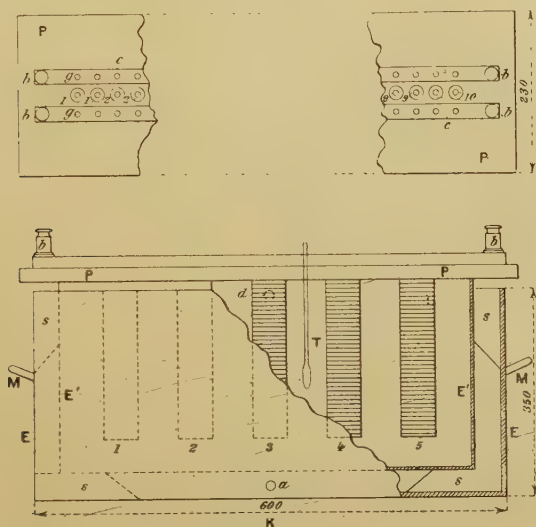


Fig. 5.

On voit en bb les bornes d'attache des fils destinés à mettre la boîte K en circuit.

Pendule et chronomètre. — Dans les mesures de temps je me suis servi d'un chronomètre Bréguet, d'un chronomètre Pierrelet et d'un pendule récemment conçu et réalisé par M. Lippmann. C'est un pendule entretenu électriquement *sans perturbation* dont le fonctionnement repose sur la proposition suivante ⁽¹⁾ :

« Si deux impulsions égales sont imprimées au pendule en un même point de sa trajectoire, l'une à la montée

⁽¹⁾ Voir *Comptes rendus*, t. CXXII, séance du 13 janvier 1896.

et l'autre à la descente, les perturbations qu'elles produisent sont égales et de sens contraire. »

La perturbation totale est donc nulle, quand même les impulsions n'auraient pas lieu exactement au passage par la verticale.

J'ai satisfait aux conditions exigées par la théorie en produisant les impulsions au moyen des courants induits dus à la fermeture et à l'ouverture d'un circuit inducteur ; le pendule ouvre et ferme successivement le circuit inducteur, lorsqu'il passe par la verticale à l'aller et au retour.

Voici le mécanisme d'entretien de l'un des pendules que j'ai construits et étudiés :

Un doigt triangulaire *i* (fig. 6) de faible masse est fixé par son centre de gravité sur le milieu d'un fil d'argent très fin tendu horizontalement. Il est relié au pendule SL par le fil de cocon *qd*. A l'aller, lorsque le pendule passe par la verticale en se rendant vers le doigt, celui-ci vient reposer sur une lame de platine α . Le circuit primaire dont les extrémités aboutissent aux deux pièces isolées *s*, α se trouve alors fermé. Le courant inducteur d'intensité *I*, développe, en s'établissant dans l'un des circuits d'un petit transformateur B, une quantité d'électricité KI qui s'écoule instantanément à travers la bobine *b* en produisant une impulsion attractive sur l'aimant NS solidaire du pendule. Au retour le pendule soulève le doigt *i* à l'instant où il repasse par la verticale, la quantité d'électricité KI induite à l'ouverture du courant inducteur, s'écoulant dans la bobine *b* en sens opposé à celui de l'électricité précédemment induite, produit une impulsion répulsive qui favorise encore le mouvement du pendule. Pour régler le contact on s'aide d'un téléphone intercalé dans le circuit inducteur ou dans le

circuit induit. L'équidistance des tops indique que le courant inducteur est fermé et ouvert à l'instant des

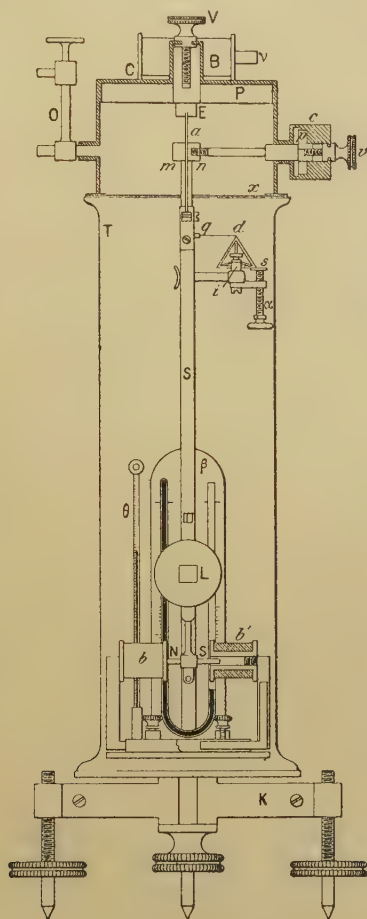


Fig. 6.

passages par la verticale. Pour une amplitude de quelques minutes les levées et les appuis du doigt *i* doivent se faire

nettement. La vis α ou dans d'autres modèles, les vis câlantes du trépied K qui supporte tout l'appareil permettent de régler le contact.

Pour faire fonctionner et régler l'appareil dans le vide (au cas où une absolue régularité de marche serait nécessaire) ou dans un gaz quelconque, il faut que l'on puisse agir sur la longueur du pendule sans introduire de l'air dans l'éprouvette. Comme les mouvements de réglage n'ont pas une grande amplitude, on satisfait à cette condition en commandant le pendule et l'étau de suspension par l'intermédiaire de membranes métalliques convenablement fixées et d'un jeu suffisant.

Le pendule représenté (fig. 6) fonctionne dans le vide, il est construit de la manière suivante : la lame de suspension a été fixée à l'extrémité pleine d'un écrou E soudé au milieu d'une membrane P dont les bords sont soudés aux parois du chapeau C. La vis V qui s'engage dans la partie supérieure de la pièce E permet de faire fléchir la membrane et, par suite, de déplacer le pendule d'environ 15 mm. Comme la lame passe entre les mâchoires m , n , d'un étau, il est facile en agissant sur la vis ν qui déplace la pièce n de serrer le ressort a après en avoir fait varier micrométriquement la longueur utile. La vis ν est montée sur la membrane p placée à l'intérieur de la boîte latérale c comme la vis V sur la membrane P.

Toutes les pièces précédentes sont portées par un chapeau métallique C dont le bord rodé α s'appuie sur la couronne terminale, également rodée d'une éprouvette T. On voit en o un robinet à pointeau, en β un baromètre tronqué et en θ un thermomètre.

Le procédé d'entretien par induction est très sûr parce qu'il réduit au minimum les organes mécaniques auxi-

liaires toujours sujets à dérangement. Il m'a paru le plus pratique des modes d'entretien que j'ai étudiés. Un seul élément Callaud du modèle ordinaire suffit à l'entretien et cela pendant plus d'un mois sans qu'on ait à ajouter du sulfate de cuivre.

Il importe de n'employer qu'un très faible courant. Il n'y a pas trace d'étincelle au contact, sauf dans le cas des contacts à mercure.

Le pendule se met en marche de lui-même dès que l'on ferme le circuit inducteur, et prend rapidement son amplitude de régime, que l'on gradue d'ailleurs *à volonté* en enfonçant plus ou moins le noyau de fer doux ν dans la bobine B. Il est facile de maintenir une amplitude de quelques minutes.

J'ai comparé le mouvement d'un pendule successivement libre et entretenu à celui d'un pendule auxiliaire approximativement synchrone du premier. Les oscillations des deux pendules s'inscrivaient, au début et à la fin de chaque phase d'observation (dont la durée était d'environ deux cents périodes) sur un cylindre maintenu en rotation uniforme au moyen d'un moteur électrique régularisé. Je me servais pour cela du moteur qui actionnait mon commutateur et la régulation était obtenue en maintenant fixe au moyen d'un frein le spot du galvanomètre. La durée d'une oscillation était représentée sur le cylindre par une longueur d'environ 1 m. Le rapport des périodes des deux pendules a été trouvé constant à 10^{-6} près, le pendule étudié étant libre ou entretenu. C'est la précision limite que le procédé de comparaison que j'ai employé me permettait d'atteindre.

Pour déterminer en fonction de la seconde la période du pendule employé, j'ai utilisé un chronomètre Bréguet préalablement vérifié par Leroy (équation $+ 1$ sec.).

En appliquant la méthode des passages composés à de longs intervalles de temps (plusieurs heures et même une journée), j'ai trouvé les valeurs suivantes, la température étant 13° entre le 31 octobre et le 6 novembre.

$T = 1,19514$ seconde du chronomètre.

1,19513

1,19513

Compteur de tours. — Le compteur de tours se compose d'un excentrique en ébonite calé sur l'axe du commutateur. Il ferme une fois par tour un circuit comprenant un élément Daniell E et un électro Déprez e . Un second circuit comprenant un élément E' et un électro e' est fermé par le pendule chaque fois qu'il passe par sa position d'équilibre en allant de gauche à droite.

Pour réaliser cette condition, j'ai construit un relai (fig. 8) formé d'une bobine B et d'un très petit aimant b fixé à l'extrémité d'une lame de clinquant l . Lorsque le pendule ferme le circuit inducteur qui l'alimente, le courant inducteur traverse la bobine B et repousse brusquement l'aimant b qui ferme en α le circuit $E' e'$. Les déplacements de b sont imperceptibles. Les électros e et e' inscrivent parallèlement sur un cylindre de Marey : le premier les tours effectués par le moteur, le second les battements du pendule.

Pour que l'inscription des tours commence au moment opportun, c'est-à-dire lorsque le régime d'équilibre est atteint, et pour obtenir en même temps une valeur déjà approchée de ν , j'ai associé un chronomètre Pierrelet et un compteur de tours ordinaire. Dès que l'on retire la cheville d'arrêt m , les ressorts rr mettent brusquement aux prises en nc les axes du commutateur et du compteur. En même temps le chronomètre C_2 est

mis automatiquement en marche : les ressorts r entraînent par l'intermédiaire de l'étrier d la fourche qui commande le mouvement. Lorsqu'on veut mettre fin à l'expérience, on tire sur l'étrier d : le circuit eE se trouve immédiatement coupé et la fourche arrête au même moment le chronomètre ; on remet en place la cheville m et on fait la lecture du compte-tours et du chronomètre. Comme les engrenages du compteur ne peuvent pas acquérir de vitesse, on peut monter un disque f et un index permettant d'apprécier la fraction de tour.

Le véritable nombre ν est déduit de l'inscription simultanée des tours et des battements du pendule. Le cylindre enregistreur reçoit son mouvement du moteur électrique, chaque seconde correspond à environ 1 m et l'inscription dure au moins huit secondes. Si l'on veut augmenter la longueur qui correspond à une seconde, on réduit moins sur le cylindre la vitesse du moteur.

Galvanomètre. — Je me suis servi d'un galvanomètre Thomson à quatre bobines construit par Bréguet. Chaque bobine porte deux fils indépendants enroulés parallèlement (fig. 7).

Numérotons 1,5 ; 4,8 les fils relatifs aux bobines supérieures fixées en regard, et 3,7 ; 2,6 les fils correspondants des bobines inférieures.

Les deux circuits du galvanomètre différentiel ont environ 60 ω de résistance et comprennent respectivement les fils 1, 2, 3, 4 ; 5, 6, 7, 8. On voit que la disposition de l'appareil présente la plus grande symétrie possible par rapport aux deux systèmes d'aiguilles aimantées. La position de l'aimant-directeur est réglée de façon à rendre la sensibilité du galvanomètre au moins égale à celle qu'impose l'erreur relative tolérée

sur la mesure. Il est inutile et incommode d'exagérer la sensibilité. Dans mes expériences le galvanomètre accusait nettement $\frac{1}{12000}$ de la grandeur à mesurer.

Electrodynamomètre. — J'ai construit un électrodynamomètre différentiel très amorti pouvant rendre de

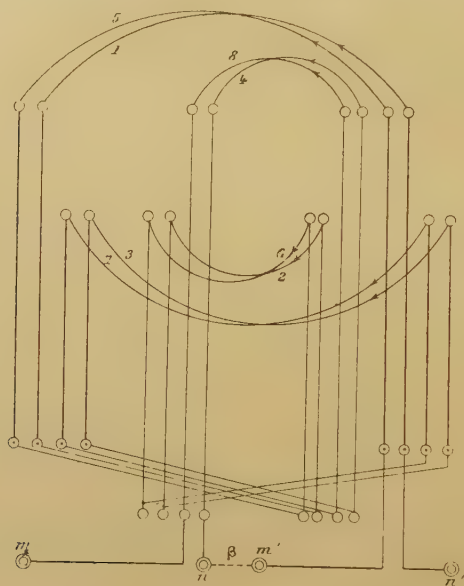


Fig. 7.

grands services mais qui s'est trouvé d'une sensibilité insuffisante pour mon cas.

Boîte auxiliaire. — J'ai eu à comparer des résistances R et R' très différentes.

On peut obtenir avec précision un tel rapport si l'on possède une boîte comprenant n résistances r identiques

et indépendantes. Les valeurs n et r étant choisies de façon à vérifier les égalités :

$$R = nr \text{ (mise en série des résistances } r) \quad (1)$$

$$R' = \frac{r}{n} \text{ (mise en parallèles des résistances } r) \quad (2)$$

on a

$$\frac{R}{R'} = n^2$$

Pour $R = 2 \times 10^5 \omega$ et $R' = 2 \times 10^3 \omega$, on satisfait approximativement aux équations (1) et (2) en prenant :

$$n = 32 \text{ et } r = 6 \times 10^3 \omega.$$

Pour déterminer le rapport de deux résistances de l'ordre de R et de R' , j'ai construit une boîte d'environ 200 000 ohms contenant 32 bobines semblables. Pour enrouler le fil sur les noyaux de buis des bobines, il est commode de l'enrouler d'abord sur un cylindre de Marey muni d'une aiguille permettant d'en estimer la rotation et de déterminer par une opération préliminaire, le nombre de tours entier ou fractionnaire qui correspond à la charge en fil que doit recevoir une bobine.

Les bobines ainsi préparées sont vissées sur des tiges métalliques, disposées en ligne droite, sur l'une des faces d'un plateau d'ébonite dont l'autre face porte, d'une part 64 godets à mercure auxquels aboutissent respectivement les extrémités des bobines, et d'autre part deux barres métalliques disposées parallèlement, percées chacune de 32 cavités équidistantes permettant la mise en parallèles. Les groupements sont faciles à réaliser au moyen de ponts tels que a , il en faut 33 pour la mise en série et 64 pour la mise en parallèles.

La comparaison des diverses bobines à l'une d'elles r donne

$$r_1 = a_1 r; \quad r_2 = a_2 r; \quad \dots \text{ etc.}$$

On a par suite

$$R_1 = (1 + a_1 + a_2 + \dots) (r) = A (r) \text{ (série)}$$

et

$$R'_1 = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots\right)} (r) = B (r).$$

D'autre part l'expérience donne encore, en comparant les résistances R et R' dont on cherche le rapport aux résistances du même ordre R_1 et R'_1 :

$$\frac{R}{R_1} = c; \quad \frac{R'}{R'_1} = d.$$

En conséquence,

$$\frac{R}{R'} \cdot \frac{R'_1}{R_1} = \frac{c}{d},$$

donc

$$\frac{R}{R'} = \frac{c}{d} \cdot \frac{R_1}{R'_1} = \frac{c}{d} \cdot \frac{A}{B}.$$

CHAPITRE IV

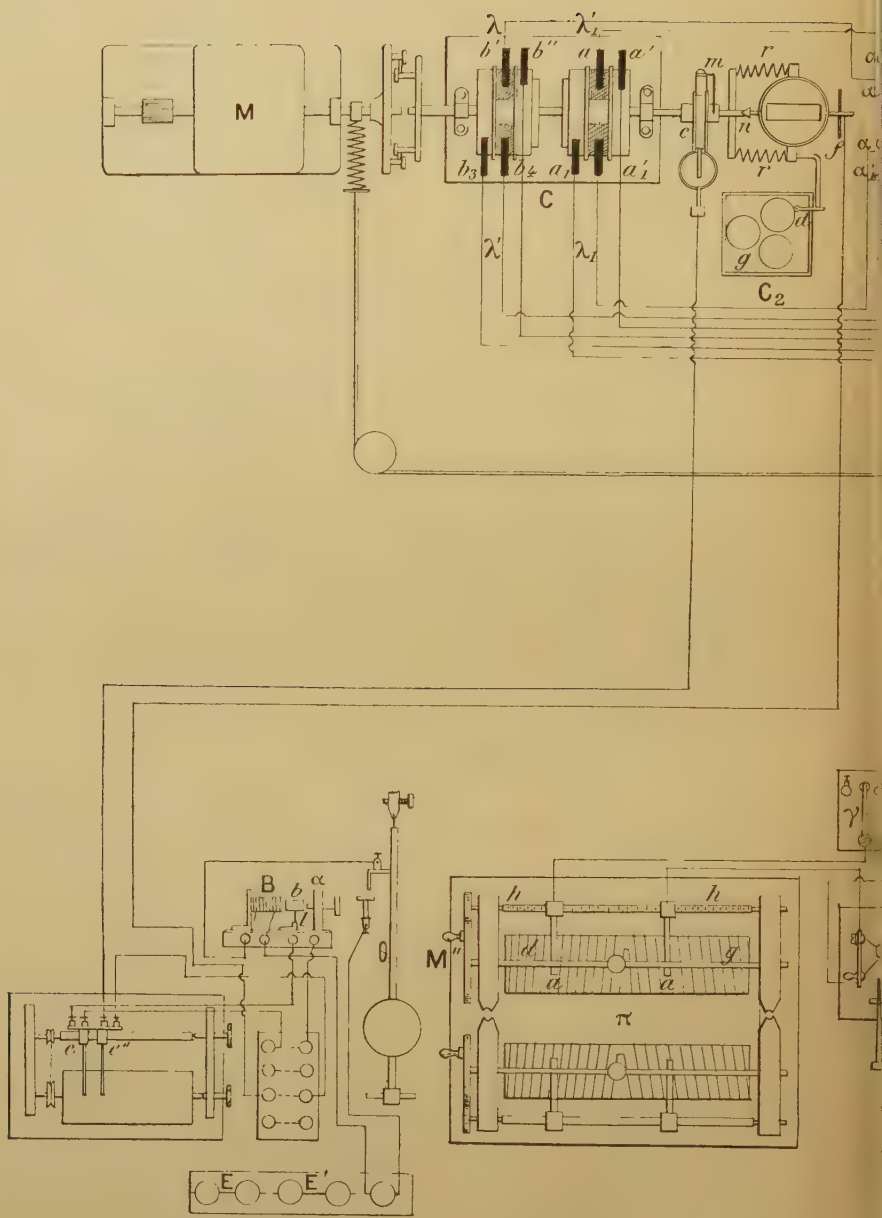
DISPOSITIONS GÉNÉRALES DES APPAREILS MESURES AUXILIAIRES

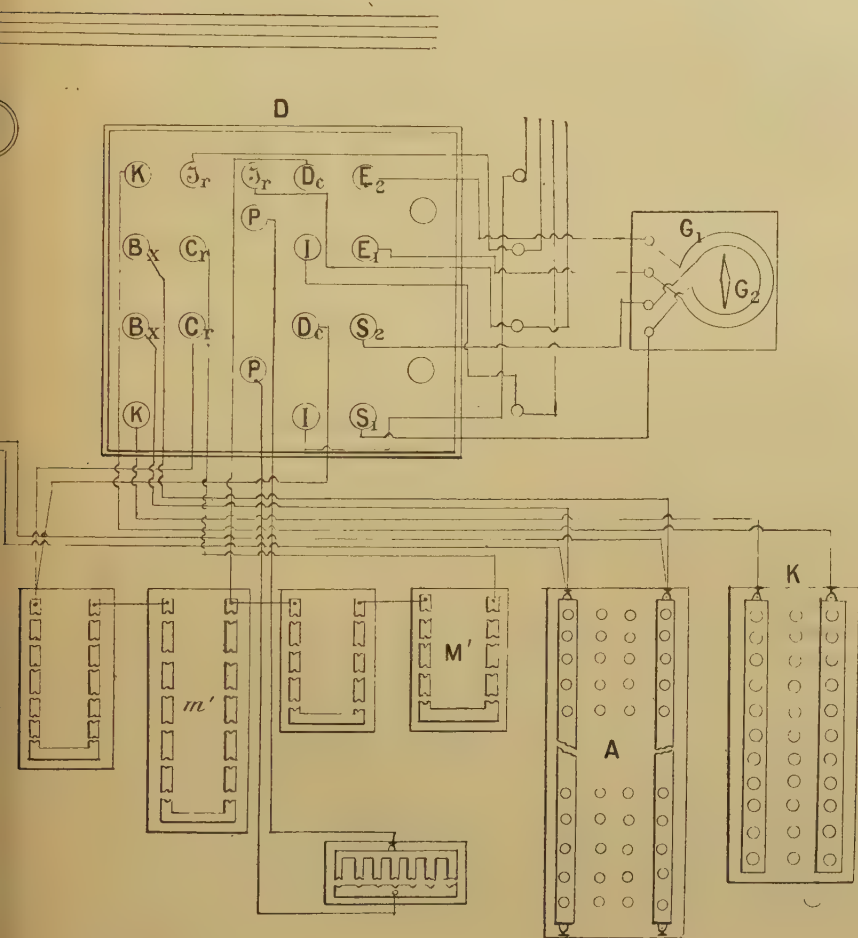
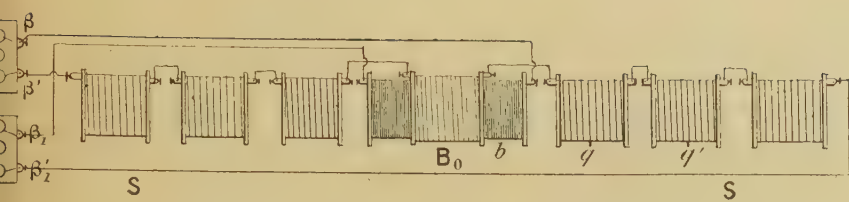
Disposition générale des appareils. — La figure 8 représente la disposition générale des appareils. On voit en SS le système inducteur formé de deux circuits indépendants dont les extrémités aboutissent aux bornes $\beta, \beta', \beta_1, \beta_1'$ d'un commutateur C_1 . En M est placé le moteur, en C le commutateur principal et en c l'excentrique compte-tours.

Des bornes $a, b', a_1' b_1$ partent des fils qui aboutissent aux bornes $\alpha, \alpha', \alpha_1, \alpha_1'$ de C_1 . On intercale dans le circuit inducteur l'un ou l'autre des deux enroulements du système SS selon que l'on abaisse dans un sens ou en sens opposé les cavaliers du commutateur C_1 .

Tous ces appareils sont solidement installés sur un épais plateau de chêne long d'environ 7 m, large d'environ 60 cm et scellé au mur.

Le moteur repose sur un socle isolé du plateau par des cales de caoutchouc, de cette façon le plateau ne vibre pas lorsque le moteur est en marche. Les bobines sont placées sur des V taillés simultanément dans une même pièce de bois et collés sur le plateau après avoir amené leurs axes à coïncider. Les fils de ligne qui des-





servent les bobines sont supportés par des potences appropriées.

La distance de deux bobines consécutives $B_k B_{k+1}$ doit être égale à la longueur l de la bobine b . Pour réaliser cette condition j'ai tracé à la machine à diviser des traits voisins sur l'une des faces d'une règle de laiton L , la distance des deux groupes de traits était voisine de l . La bobine b et la règle étant placées verticalement et près l'une de l'autre, j'ai reporté sur la règle au moyen du cathétomètre la longueur l : deux traits limitent cette longueur.

La règle L est ensuite disposée au-dessus et très près des deux bobine B_k, B_{k+1} qu'il s'agit de fixer. De petits fils de cocon lestés battent en regard des traits q, q' . On amène le plan moyen des bobines à contenir les fils. Ce résultat est atteint lorsque l'image de l'intervalle 100, 101 coïncide avec celle du fil sur le réticule d'un viseur porté par le chariot d'une machine à diviser installée parallèlement à la règle. La position de la bobine initiale B_0 étant choisie arbitrairement, on fixe d'abord la position de la bobine B_1 comme il vient d'être expliqué. On règle de même la position des bobines $B_2, B_3, \dots$ en reportant la règle de $B_0 B_1$ en $B_1 B_2$ puis en $B_2 B_3, \dots, B_5 B_6$.

Des bornes $a', a_1; b'', b_3$ partent deux lignes $\lambda\lambda'; \lambda_1\lambda'_1$ qui se rendent au distributeur D . Ce distributeur comprend 20 godets à mercure immobilisés par une couche de paraffine. Un plateau de bois est supporté par quatre colonnes parallèlement à celui sur lequel repose les godets. Des trous, percés dans le plateau supérieur en regard de chacun des godets, permettent d'y amener les extrémités des circuits intéressés. De cette façon il est commode, au moyen de ponts convenables, d'effectuer

les divers groupements nécessités par l'expérience d'équilibre et par les comparaisons de résistances qui doivent suivre.

Les extrémités des circuits galvanométriques $G_1 G_2$ sont en $E_1 E_2$, $S_1 S_2$; celles du circuit inducteur en $I_r I_r$, du circuit induit en II ; de la résistance à mesurer K en KK ; du circuit de compensation, comprenant les boîtes M', m' , en $C_r C_r$; de la dérivation de compensation en $D_c D_c$; de la boîte auxiliaire en B, B . Enfin les pôles de la force électromotrice utilisée aboutissent en PP . On fait varier cette force électromotrice de 1 à 110 volts par le déplacement d'une fiche. Cette force électromotrice est fournie par 10 éléments Callaud jusqu'à 10 volts et par une batterie d'accumulateurs jusqu'à 110 volts.

Le plus souvent les résistances ont été comparées par la méthode potentiométrique. On voit en π le potentiomètre employé, en ϵ l'électromètre Lippmann — auquel j'ai parfois substitué un galvanomètre Thomson de grande sensibilité, — en γ une clef à directions multiples permettant d'opposer rapidement et commodément les différences de potentiels xi , yi , à comparer aux différences de potentiels $\lambda i'$, $\lambda' i'$ qui les équilibrent, prises sur le fil du potentiomètre.

On a

$$\frac{x}{y} = \frac{\lambda}{\lambda'}.$$

Les prises de potentiels se font au moyen de fiches mobiles que l'on plonge dans les godets à mercure auxquels aboutissent les extrémités de la résistance à considérer.

J'ai enroulé sur la bobine d'ébonite du potentiomètre (longueur 50 cm, diamètre 8 cm) un fil de maillechort de 0,5 mm de diamètre. En agissant sur la manivelle M''

on éloigne ou on rapproche, selon le sens de la rotation deux contacts en argent a que le système mobile dg permet d'appuyer sur le fil. On estime sur la tige graduée hh le nombre de tours de fil intercalés entre les contacts, la lecture de l'index sur le tambour donne la fraction de tour complémentaire.

Il faut dans toutes les comparaisons, satisfaire à plusieurs conditions.

La différence de potentiel V que présentent les extrémités du fil potentiométrique doit être très légèrement supérieure à la plus grande des différences de potentiel à équilibrer que comprend la série donnée. En utilisant les plus fortes lectures possibles on rend minimum leur erreur relative.

On constate l'équilibre le plus souvent au moyen de l'électromètre capillaire : il faut que la fraction de division appréciable sur le tambour corresponde à une différence de potentiel Δv capable d'agir sur l'électromètre, il serait incommode et inutile d'employer un appareil trop sensible. Si N est le nombre des tours de fil, n celui des divisions du tambour et $\frac{1}{p}$ la fraction de division appréciable, on a

$$\Delta v = \frac{V}{Nnp}.$$

Pour $\Delta v = \frac{1}{10000}$ de volt, $N = 66$, $n = 100$, cas du dispositif employé, deux éléments Daniell suffisent. D'ailleurs une résistance modifiable mise en série avec le fil potentiométrique permet d'ajuster l'appareil si la force électromotrice est un peu trop grande.

Une comparaison de deux résistances a et b au moyen du potentiomètre p exige trois lectures par pointé : $a, p; b, p$; retour a, p : les deux lectures a, p interviennent

par leur moyenne, on élimine ainsi les variations lentes et continues de la pile.

Avant d'aborder les mesures intéressant directement le calcul de R , j'ai vérifié les deux boîtes Carpentier n° 1769 (1 et 2).

J'ai calibré ensuite (au moyen des boîtes 1, 2) le fil de maillechort que j'avais enroulé sur le potentiomètre.

Mesures auxiliaires. — Les mesures auxiliaires ont pour objet :

1° De comparer à l'une d'elles les résistances de la boîte (K) ;

2° De comparer à l'une d'elles les résistances de la boîte auxiliaire (A) ;

3° De déterminer n_1 , N et s .

Les données expérimentales précédentes permettent, en particulier, de calculer A et B (page 42) ainsi que L_m .

Boîte K. — En prenant comme unité auxiliaire la bobine n° 7 on a pour la résistance totale des bobines sériées :

$$X_s = 9,703566 (7)$$

Les bobines étant associées en parallèles on a

$$X_p = 0,096977 (7)$$

D'ailleurs les diverses bobines ont les résistances suivantes :

(1) = 0,970248 (7)	(6) = 0,960235 (7)
(2) = 0,939213	(7) = 1
(3) = 0,988618	(8) = 0,954919
(4) = 0,954363	(9) = 0,990334
(5) = 0,957836	(10) = 0,988147

Les nombres R_s qui ont fourni la moyenne X_s sont très voisins, la plus grande erreur relative est inférieure à $\frac{1}{20\,000}$.

Boîte auxiliaire. — J'ai trouvé pour la résistance des 32 bobines en série :

$$Y_s = 29,22980 \text{ (2)}$$

et en parallèles

$$Y_p = 0,028503 \text{ (2)}$$

Les résistances des bobines successives 1, 2 ..., 32 rapportées à celle de la bobine n° 2 ont pour mesures respectives :

0,970113	0,893780
1	0,892975
0,906756	0,915990
0,969002	0,925411
0,937910	0,916839
0,911779	0,899342
0,895814	0,897762
0,937222	0,898642
0,910620	0,900387
0,89906	0,890990
0,893415	0,955753
0,926312	0,940939
0,896449	0,791015
0,905464	0,914266
0,898756	0,892947
0,945721	0,898366

La connaissance de ces rapports permet d'utiliser une fraction connue quelconque de la boîte auxiliaire.

Mesure géométrique du diamètre moyen de la bobine.
— Le diamètre de la bobine a été mesuré directement

par vingt pointés pour chaque diamètre, dans quatre sections équidistantes, et dans chaque section pour quatre azimuths deux à deux rectangulaires.

Voici les nombres obtenus :

$$9,91089; \quad 9,87384; \quad 9,91740; \quad 9,87656 \quad (1)$$

$$9,94481; \quad 9,87319; \quad 9,94887; \quad 9,86536 \quad (2)$$

$$9,88223; \quad 9,89395; \quad 9,88266; \quad 9,88590 \quad (3)$$

$$9,87705; \quad 9,90921; \quad 9,88408; \quad 9,90784. \quad (4)$$

On a donc, pour le diamètre moyen extérieur,

$$2r' = 9,895865 \text{ cm}$$

et, pour le diamètre correspondant à l'axe du fil enroulé,

$$2r' = 9,853865$$

Cette lecture exprimée en centimètres internationaux et corrigée de la température, au moyen du coefficient du laiton ($18\,473 + 5,99\,t$) 10^{-9} , devient :

$$2r = 9,86303$$

La surface moyenne d'une spire vaut par suite

$$s = 76,4039 \text{ cm}^2$$

J'ai obtenu la même valeur du diamètre à 10^{-5} près, en le définissant par la condition

$$ns = s_1 + s_2 + \dots + s_n.$$

Longueur de la bobine. — Le fil est enroulé suivant une hélice tracée au tour dont le pas a été très soigneusement déterminé et a pour valeur 0,045352 cm.

Pour obtenir le nombre des spires de la bobine, j'ai tracé six traits à peu près équidistants, puis je les ai

visés successivement au cathétomètre. Les lectures correspondantes sont :

696,74	(1)	287,36	(4)
575,70	(2)	173,20	(5)
446,29	(3)	35,81	(6)

En divisant les différences 1,2 ; 2,3 ; 3,4 ; 4,5 ; 5,6 par le pas, on obtient le nombre des spires relatives à chacun des tronçons, à savoir :

267, 285, 350, 252, 303.

Comme il y a 5 spires au-dessus du trait 1 et 5 spires au-dessous du trait 6 la bobine porte 1 467 spires. La longueur est donc de

$$1467 \times 0,045352 = 66,53079 \text{ cm.}$$

Elle porte

$$n_1 = 22,0499 \text{ spires par cm.}$$

CHAPITRE V

MESURE MAGNÉTIQUE DE LA SECTION DE LA BOBINE

Mesure magnétique de la section de la bobine. — La bobine que j'ai utilisée étant de faible diamètre, les inégalités que présentent le fil, sa couverture et l'enroulement, perturbent la mesure géométrique. La tension d'enroulement et le gomme-laquage destiné à assurer l'isolement, modifiant d'autre part le diamètre total du fil, que doit-on retrancher du diamètre extérieur de la bobine pour obtenir son diamètre théorique?

Ces considérations m'ont contraint à mesurer par voie magnétique la section de la bobine théorique équivalente à la bobine donnée. Les résultats obtenus fournissent en outre des indications précieuses sur l'isolement des spires.

Si on employait une bobine cylindrique de diamètre convenable, à noyau bien isolant, portant un fil nu et relativement fin, étudié après l'enroulement, ces mesures auxiliaires seraient moins nécessaires mais demeureraient utiles comme critérium de la perfection de la bobine.

Surface étalon. — Le noyau du cerceau qui m'a servi d'étalon (fig. 9) a été obtenu en superposant plusieurs

disques de bois *p* de même rayon assemblés à fibres

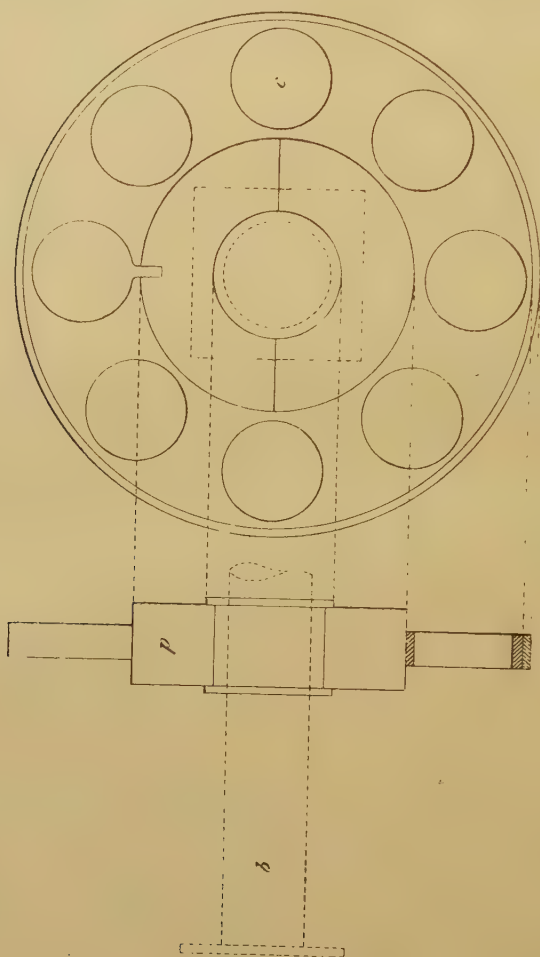


Fig. 9.

croisées. Le système est allégé par de larges percées circulaires *c* et par l'ouverture centrale qui permet de l'en-

filer sur un support convenable. Le disque de bois est serré par un cercle plat en laiton d'environ 61 cm de diamètre sur le filet duquel s'enroulent 40 spires. Les extrémités du fil sont reliées à deux bornes voisines. Les spires sont faciles à compter au moyen d'un microscope de faible puissance ou à la lunette.

Mesure du diamètre du cerceau auxiliaire. — J'ai mesuré le diamètre du cerceau suivant dix azimuths, c'est-à-dire de 36° en 36° . Je me suis servi d'un cathétomètre à deux lunettes munies de microscopes à réticules micrométriques.

L'échelle, en forme d'H, portant une graduation sur argent, est installée verticalement sur son support et près du cerceau dont le plan est également vertical. Le cathétomètre étant réglé et les lunettes disposées de façon à pouvoir viser tangentiellement le cerceau, on cherche, en répétant les pointés, à déterminer la position des fils horizontaux fixes des réticules par rapport aux divisions les plus voisines de la règle. La mesure est effectuée au moyen de dix pointés au réticule horizontal mobile. Des vingt pointés on a déduit que le réticule supérieur était à 1 tour 0689 de la division 14 mm, cette division de la règle étant au-dessus du réticule. Le tarage du micromètre préalablement effectué permet de transformer les tours en mm, soit 0,735195 mm.

En résumé, le réticule supérieur correspond à

$$1,47352 \text{ cm.}$$

Dix pointés, après le tarage du micromètre inférieur, ont donné pour la position du réticule fixe de la station inférieure

$$62,2482 \text{ cm.}$$

La distance des deux réticules fixes est donc de 60,7740 cm de la règle de la Société genevoise de construction.

Cette mesure répétée plusieurs fois a donné comme moyenne :

$$\overline{RR'} = 60,7726.$$

La distance δ de l'extrémité supérieure des diamètres 11, 22,, etc., à R (réticule fixe supérieur) et celle δ' de l'extrémité inférieure au réticule inférieur R' ont été estimées par 10 pointés.

On a

$$n_1 n = \overline{RR'} + \delta' - \delta.$$

Les valeurs obtenues pour $\delta' - \delta$ sont pour les dix diamètres :

+ 1,0212 mm	+ 1,0177
+ 0,5539 »	+ 0,5402
— 0,1034 »	— 0,2382
— 0,0016 »	— 0,5920
+ 0,3283 »	+ 0,4411

Moyenne $\delta' - \delta = 0,19772$ mm.

Diamètre moyen extérieur = 60,7924.

Diamètre du fil enroulé = 0,4815 mm.

En comparant la règle du cathétomètre à l'étalon international (copie β), j'ai trouvé pour le module de conversion 1,000494, donc

$$D = 60,7743 \text{ cm internationaux.}$$

On peut comparer les surfaces de la bobine et du cerceau de diverses façons. Les méthodes les plus immédiates et les plus simples sont fondées sur les propriétés du champ magnétique uniforme. Lorsque le système bobine-cerceau est lourd, il n'est pas possible, à moins de compenser le poids par une force opposée,

de le suspendre à un fil de torsion délicat dans le but d'équilibrer l'un par l'autre les deux couples que le champ magnétique uniforme exerce sur lui. Il est plus facile d'équilibrer l'un par l'autre au balistique, les effets d'induction dus par exemple au retournement face pour face du système monté comme l'indique la figure 9. J'ai rejeté la méthode des oscillations et celle des déviations observées dans un champ résultant du champ extérieur et d'une fonction des champs H_b et H_c .

Désirant éviter l'enroulement correcteur et l'intervention effective d'un champ extérieur, j'ai cherché à équilibrer les champs H_b et H_c produits en un point de leur axe par la bobine et par le cerceau.

Dans cet ordre d'idées, le calcul des champs H_b et H_c devient indispensable.

Calcul du champ produit par une hélice en un point de son axe. — Il semble que le calcul classique du champ en un point de l'axe d'une bobine convient seulement au cas où le circuit se réduit à un système de circonférences parallèles et jointives. Il est aussi facile de supposer que le circuit est constitué par une hélice de pas h et de rayon R . Les coordonnées d'un point de l'hélice sont

$$x = R \cos \omega, \quad y = R \sin \omega, \quad z = \frac{h}{2\pi} \omega,$$

l'élément d'arc d'hélice ds est donc tel que

$$ds^2 = \left(R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} \right) d\omega.$$

Il peut être considéré comme la somme géométrique de l'élément d'arc circulaire $d\sigma = R d\omega$ et de l'élément

d'arc parallèle aux génératrices $d\sigma' = \frac{h}{2\pi} d\omega$. Calculons

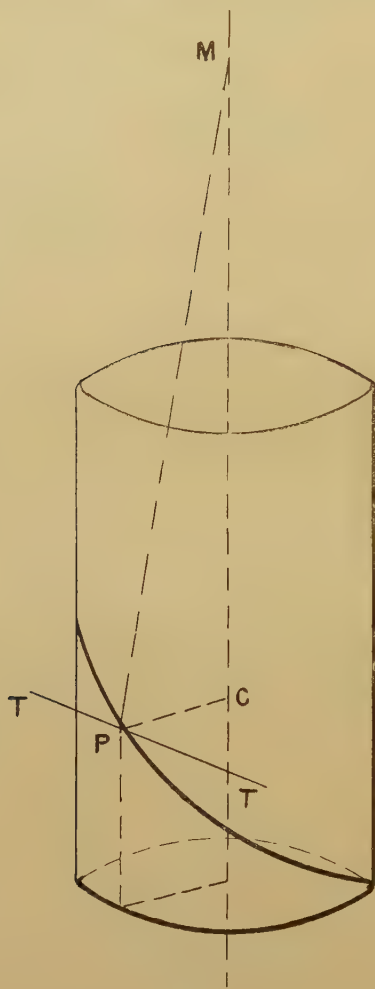


Fig. 10.

d'abord le champ suivant l'axe du cylindre dû aux élé-

ments $d\sigma$ parcourus par le courant unité. L'élément de courant $d\sigma$ produit en M (fig. 10) l'action $\frac{d\sigma}{r^2}$ perpendiculaire au plan MTT'. La composante suivant l'axe de la bobine a pour mesure :

$$dZ = \frac{d\sigma}{r^2} \cdot \sin \beta = \frac{R^2 d\omega}{r^3},$$

r mesure la distance PM et β désigne l'angle PMC. En appelant d la distance du point M au plan moyen de la spire on a,

$$r^2 = R^2 + \left(d + \frac{h}{2} - \gamma\right)^2,$$

donc

$$\begin{aligned} dZ &= \frac{R^2 d\omega}{\sqrt{\left[R^2 + \left(d + \frac{h}{2} - \gamma\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}} \\ &= R^2 \frac{d\omega}{\sqrt{\left[R^2 + \left(d + \frac{h}{2} - \frac{h}{2\pi} \omega\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}} \end{aligned}$$

En posant $\nu = d + \frac{h}{2} - \frac{h}{2\pi} \omega$ et intégrant, il vient

$$Z = -\frac{2\pi}{h} \left[\frac{\nu}{(R^2 + \nu^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{\nu_0}^{\nu_1}. \quad (1)$$

Il est facile de construire une courbe de coordonnées polaires Z et ω , fournissant par la variation $Z_1 \rightarrow Z_0$ du rayon vecteur le champ cherché; mais on peut obtenir une formule très simple relative au champ Z pour un nombre n de spires. En intégrant (1) pour une spire, il vient

$$Z = -\frac{2\pi}{h} \left[\frac{d - \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(d - \frac{h}{2}\right)^2}} - \frac{d + \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(d + \frac{h}{2}\right)^2}} \right]. \quad (2)$$

Joignons le point M aux points P₀ et P₁ extrémités de la spire et soient V₀ et V₁ les angles en M ainsi formés

$$\cos V_0 = \frac{d + \frac{h}{2}}{\sqrt{\left(d + \frac{h}{2}\right)^2 + R^2}}; \quad \cos V_1 = \frac{d - \frac{h}{2}}{\sqrt{\left(d - \frac{h}{2}\right)^2 + R^2}}$$

par suite, pour la première spire

$$Z_1 = -\frac{2\pi}{h} [\cos V_1 - \cos V_0].$$

Les spires suivantes fournissent les champs :

$$Z_2 = -\frac{2\pi}{h} [\cos V_2 - \cos V_1]$$

$$Z_3 = -\frac{2\pi}{h} [\cos V_3 - \cos V_2]$$

.

$$Z_n = -\frac{2\pi}{h} [\cos V_n - \cos V_{n-1}]$$

par suite

$$Z = -\frac{2\pi}{h} (\cos V_n - \cos V_0)$$

Or l'inverse du pas $\frac{1}{h}$ est le nombre de spires n_1 distribuées sur l'unité de longueur, donc

$$Z = -2\pi n_1 (\cos V_n - \cos V_0). \quad (3)$$

Dans le cas des bobines unicouches ordinaires, il faut, dans la formule (3) prendre h égal au diamètre du fil enroulé. Pour $h=0$ la formule (2) donne l'action exercée par un circuit circulaire.

$$Z_c = \frac{2\pi R^2}{\sqrt{(R^2 + d^2)^3}} \quad 4$$

D'ailleurs, pour h petit, Z peut se mettre sous la forme

$$Z = \frac{2\pi R^2}{\sqrt{(R^2 + d^2)^3}} \left[1 + \frac{h^2}{8} \frac{4d^2 - R^2}{R^2(R^2 + d^2)} \dots \right]$$

obtenue soit par le développement de l'intégrale (1) soit par l'intégration du développement de dZ .

Un élément de circuit parallèle aux génératrices détermine avec le pôle unité placé sur l'axe un plan qui contient l'axe, par suite, le champ électro-magnétique U dû à de tels éléments est normal à l'axe. Le champ total est dirigé obliquement sur l'axe suivant la résultante de Z et U .

L'action due à l'élément $d\sigma'$ a pour valeur

$$df = \frac{R d\sigma'}{r^3} = \frac{h}{2\pi R} dZ.$$

En composant les forces df par la règle du polygone on obtient une courbe dont la longueur d'arc est

$$s = f = \frac{h}{2\pi R} Z,$$

et la corde correspondante $c = U$. Donc le champ total a pour mesure l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit $s = \frac{2\pi R}{h}$ et la corde de l'arc s . Les composantes de U suivant ox et oy sont, pour une spire :

$$X = \frac{Rh}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \omega d\omega}{\sqrt{\left[R^2 + \left(d + \frac{h}{2} - \frac{h}{2\pi} \omega \right)^2 \right]^3}}$$

et

$$Y = -\frac{Rh}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \omega d\omega}{\sqrt{\left[R^2 + \left(d + \frac{h}{2} - \frac{h}{2\pi} \omega \right)^2 \right]^3}}.$$

Pour comparer au magnétomètre les surfaces de la bobine et du cerceau, il est commode de donner aux valeurs correspondantes du champ Z suivant l'axe, une forme particulière.

Cas de la bobine. — La formule (3) donne

$$Z = 2\pi n_1 (\cos V_0 - \cos V_n) \text{ ou } \sigma (\Omega - \Omega')$$

σ mesure la densité magnétique sur la face de la bobine, Ω et Ω' sont les angles solides sous lesquels on voit du point actionné les faces de la bobine. En désignant par D la distance du centre de la bobine au point et par l la demi-longueur de la bobine, on a en posant

$$\Delta = \left(1 + \frac{l}{D}\right)^{-2}; \quad \Delta' = \left(1 - \frac{l}{D}\right)^{-2};$$

$$\Omega - \Omega' = 2\pi \left\{ \left[1 + \frac{r^2}{D^2} \Delta\right]^{-\frac{1}{2}} - \left[1 + \frac{r^2}{D^2} \Delta'\right]^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

Dans mes expériences la plus grande valeur de $\frac{r}{D}$ est inférieure à $\frac{1}{10}$, donc $\frac{r^2}{D^2}$ est inférieur à $\frac{1}{100}$; la plus grande valeur de Δ est inférieure à $\frac{3}{2}$, la plus grande valeur de Δ' est inférieure à 2,5. Par suite, les termes $\frac{r^2}{D^2} \Delta$, $\frac{r^2}{D^2} \Delta'$ sont toujours inférieurs à l'unité, on peut donc développer les crochets ce qui donne :

$$\left[1 + \frac{r^2}{D^2} \Delta\right]^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{D^2} \Delta + \frac{3}{8} \frac{r^4}{D^4} \Delta^2 - \frac{5}{16} \frac{r^6}{D^6} \Delta^3$$

$$+ \frac{35}{128} \frac{r^8}{D^8} \Delta^4 - \frac{63}{256} \frac{r^{10}}{D^{10}} \Delta^5 + \frac{231}{1024} \frac{r^{12}}{D^{12}} \Delta^6 - \frac{429}{2048} \frac{r^{14}}{D^{14}} \Delta^7 + \Theta.$$

Le développement du second crochet est de la même forme, on a par suite :

$$\Omega - \Omega' = \pi \frac{r^2}{D^2} (\Delta' - \Delta) \left[1 - \frac{3}{2} \frac{r^2}{D^2} \left(\frac{\Delta'^2 - \Delta^2}{\Delta' - \Delta} \right) + \frac{5}{8} \frac{r^4}{D^4} \frac{\Delta'^3 - \Delta^3}{\Delta' - \Delta} - \frac{35}{64} \frac{r^6}{D^6} \frac{\Delta'^4 - \Delta^4}{\Delta' - \Delta} + \theta \right]$$

D'autre part $\sigma = n_1$; $\Delta' - \Delta = \frac{4l}{D} \left(1 - \frac{l^2}{D^2} \right)^{-2}$ et

$\pi r^2 = s$ surface de la section droite de la bobine. En remarquant que $2 l n_1 = n$ il vient :

$$H_b = \frac{2ns}{D^3} \left(1 - \frac{l^2}{D^2} \right)^{-2} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{r^2}{D^2} \frac{\Delta'^2 - \Delta^2}{\Delta' - \Delta} + \frac{5}{8} \frac{r^4}{D^4} \frac{\Delta'^3 - \Delta^3}{\Delta' - \Delta} - \frac{35}{64} \frac{r^6}{D^6} \frac{\Delta'^4 - \Delta^4}{\Delta' - \Delta} + \theta \right]$$

Le produit des deux premiers facteurs représente le champ que produirait en M le magnétisme des faces s'il était condensé en leur centre, et le crochet tient compte de la distribution uniforme sur les faces.

En portant dans le dernier terme du crochet les valeurs de D choisies de manière à élever le plus possible la valeur de ce terme on obtient une valeur inférieure à $\frac{1}{7000}$. Comme l'erreur est moindre que le premier terme de θ et que ce premier terme est très inférieur à $\frac{1}{7000}$, il convient de limiter le crochet au terme en $\frac{r^6}{D^6}$. Pour les grandes distances ce terme lui-même n'affecte pas les décimales sur lesquelles il est légitime de compter.

Cas du cerceau. — Il faut développer le facteur relatif à la distribution des spires le long de la génératrice du

cerceau en mettant en évidence les puissances du rapport $\frac{l}{D}$ qui est très petit. Le calcul est particulièrement simple en le conduisant de la manière suivante : Si le cerceau porte N_1 spires par centimètre de génératrice la tranche dx en comprend $N_1 dx$. Cette tranche produit à la distance $D-x$ un champ ayant pour intensité d'après la formule (4)

$$\frac{2SN_1 dx}{\left[(D-x)^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

En désignant par $2l$ la distance des deux plans limites du cerceau, le champ magnétique produit en M par la totalité des spires sera H_c ,

$$H_c = 2SN_1 \int_{-l}^{+l} \frac{dx}{\left[(D-x)^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

On peut encore écrire, en posant $\rho^2 = D^2 + R^2$.

$$H_c = \frac{2SN_1}{\rho^3} \int_{-l}^{+l} \left[1 + \frac{x(x-2D)}{\rho^2} \right]^{-\frac{3}{2}} dx \quad (I)$$

Posons $y = \frac{x(x-2D)}{\rho^2}$ et considérons l'expression $(1+y)^{-\frac{3}{2}}$. Comme la quantité y est inférieure à l'unité la formule de Newton généralisée donne

$$(1+y)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}y + \frac{15}{8}y^2 - \frac{35}{16}y^3 + \frac{315}{128}y^4 + \theta.$$

Les termes de la partie θ du développement sont d'un degré supérieur à 4.

Pour effectuer l'intégrale (1) on peut substituer au crochet son développement et l'on est conduit à

$$H_c = \frac{2SN_1 2l}{\rho^3} \left[1 - \frac{l^2}{2\rho^2} + \frac{3}{8} \frac{l^4}{\rho^4} + \frac{5}{2} \frac{l^2}{\rho^2} \frac{D^2}{\rho^2} - \frac{5}{16} \frac{l^6}{\rho^6} - \frac{21}{4} \frac{D^2}{\rho^2} \frac{l^4}{\rho^4} \dots \right]$$

Le rapport $\frac{D^2}{\rho^2}$ est toujours plus petit que 1. Cherchons quelle est la valeur de $\frac{l^6}{\rho^6}$ dans un cas défavorable de mes expériences.

Prenons l égal à 1 cm, la plus petite valeur de D est voisine de 57 cm, et la plus petite valeur de ρ est supérieure à 60 cm ; donc on a

$$\frac{l}{\rho} < \frac{1}{60} \text{ et par suite } \left(\frac{l}{\rho} \right)^6 < \frac{1}{12 \times 10^6}.$$

Il est inutile de laisser figurer dans le crochet les puissances de $\frac{l}{\rho}$ supérieures à 2. La formule qui donne le champ Z dû au cerceau se réduit alors à

$$H_c = \frac{2SN_1 2l}{\rho^3} \left[1 - \frac{l^2}{2\rho^2} + \frac{5D^2}{2\rho^2} \frac{l^2}{\rho^2} \right].$$

En désignant par N le nombre total des spires on a $N = 2 l N_1$, par suite

$$H_c = \frac{2SN}{\rho^3} \left[1 + \frac{l^2}{2\rho^2} \left(\frac{5D^2}{\rho^2} - 1 \right) \right]$$

Cette formule montre que le cerceau agit comme une spire, supposée placée dans le plan central, qui serait parcourue par un courant dont l'intensité est mesurée par le même nombre que les spires du cerceau multiplié par un facteur de correction qui tient compte de la dis-

tribution des spires. Le facteur de correction ε est toujours positif. On a

$$\varepsilon = \frac{l^2}{2\rho^2} \left(\frac{5D^2}{\rho^2} - 1 \right) > 0.$$

En effet, comme $\rho^2 = R^2 + D^2$, ε est positif si la condition $5 D^2 > R^2 + D^2$ est satisfaite, il faut donc que l'on ait :

$$4D^2 > R^2 \quad \text{ou} \quad D > \frac{R}{2}.$$

Or, $R = 30,3973$ cm internationaux et la plus petite valeur de D surpasse toujours R , *a fortiori* $\frac{R}{2}$.

On pourrait négliger la correction dans le cas où $\frac{5D^2}{\rho^2} = 1$, c'est-à-dire lorsque

$$4D^2 = R^2 \quad \text{ou} \quad D = \frac{R}{2}.$$

En plaçant le centre du cerceau à une distance de l'aiguille aimantée égale à la moitié du rayon du cerceau, la parenthèse commencerait seulement au terme en $\frac{l^4}{\rho^4}$, et par suite se réduirait à l'unité dans les conditions où ce rapport peut être négligé.

Dans mon appareil $\frac{R}{2} = 15,18865$; pour $l = 1$ comme $\rho = \sqrt{R^2 + D^2}$ on a

$$\frac{l^4}{\rho^4} < \left(\frac{1}{33} \right)^4 ;$$

ce rapport est donc inférieur à 10^{-6} . Pour $D = \frac{R}{2}$ la correction est soustractive. Lorsque l'aiguille est au centre du cerceau $D = 0$ et l'on a

$$\varepsilon = - \frac{l^2}{2\rho^2}.$$

La correction due à la largeur du cerceau doit bien alors être négative, car si toutes les spires sont d'abord concentrées dans le plan central qui renferme l'aiguille leur effet diminue lorsqu'on les écarte de ce plan dans un sens ou dans l'autre.

Voyons encore, en considérant ε comme une fonction de D , quelle valeur de D annule la dérivée $\frac{d\varepsilon}{dD}$. On obtient ainsi

$$D = R \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ainsi la partie principale de la correction est négative pour $D = 0$, elle s'annule pour $D = \frac{R}{2}$, puis elle devient positive et augmente; elle prend sa valeur maximum pour $D = R \sqrt{\frac{3}{2}}$; elle diminue ensuite pour atteindre la valeur zéro lorsque D est infini.

Calculons la valeur maxima de la correction ε

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{l^2}{2\rho^2} \left(\frac{5D^2}{\rho^2} - 1 \right) \\ D^2 &= \frac{3}{2} R^2; \quad \rho^2 = \frac{5}{2} R^2, \\ \varepsilon_{\max.} &= \frac{2}{5} \frac{l^2}{R^2}.\end{aligned}$$

Dans le cas du cerceau employé on a $l < 1$ et $R > 30$ cm, par suite

$$\varepsilon_{\max.} < \frac{2}{5} \frac{1}{30^2} < \frac{1}{2\,250}.$$

Le facteur correctif ε est donc dans les conditions de l'expérience notablement inférieur à $\frac{1}{2\,250}$.

Comparaison des sections S et s du cerceau et de la bobine. — J'ai comparé de diverses manières les surfaces S et s de la bobine et du cerceau auxiliaire.

1° *Méthode des résistances.* — Disposons le système bobine-cerceau en opposition à la distance d (distance du centre commun à l'axe du magnétomètre). Groupons les deux bobines en dérivation sur les bornes de l'électromoteur et intercalons dans celle qui fait le plus d'effet une résistance continue. En introduisant une fraction convenable de cette résistance dans le circuit on obtiendra l'équilibre. Dans ces conditions on a :

$$iH_b = i'H_c,$$

or

$$i = \frac{V}{R_b} ; \quad i' = \frac{V}{R_c + r},$$

donc

$$\frac{i'}{i} = \frac{R_b}{R_c + r}$$

Comme $H_b = \frac{i'}{i} H_c$ on a finalement

$$H_b = \frac{R_b}{R_c + r} H_c. \quad (III)$$

Le rapport des résistances est ensuite estimé au potentiomètre.

Cette méthode de comparaison des surfaces présente un inconvénient, les courants interviennent ici par leur intensité relative ; or si les résistances s'échauffent inégalement, le rapport $\frac{R_b}{R_c + r}$ varie, le spot ne reste pas fixe, aussi est-il préférable d'opérer comme il suit :

2° Supposons que l'on fasse coïncider les centres et

les axes du cerceau et de la bobine, puis que l'on installe le système sur la règle du magnétomètre de façon que l'axe commun aille passer par le milieu de la petite aiguille mobile. Une seconde bobine compensatrice est placée de la même façon sur une seconde règle opposée à la première. Les trois bobines étant parcourues par le même courant, on cherche la distance D du centre du système bobine-cerceau à l'aiguille pour que le champ additif du système soit compensé par celui de la bobine auxiliaire. On a alors

$$H_b. + H_c. = h_a. \quad (1)$$

Comme les divers champs sont proportionnels aux courants d'excitation des bobines et que le même courant alimente celles-ci, il est évident que l'équilibre a lieu pour la même valeur de D quelle que soit l'intensité du courant utilisé.

Pour simplifier choisissons le courant 1. En pratique on emploie le courant le plus intense que puisse supporter les bobines sans inconvénients, dans le but de déterminer D avec la précision nécessaire, la sensibilité de l'appareil magnétométrique étant donnée. La différence des deux champs antagonistes est en effet proportionnelle à i en sorte qu'un petit déplacement à partir de la position d'équilibre se traduit par un déplacement du spot sur la règle proportionnel à i .

On change ensuite le sens du courant dans le cerceau seul de façon à produire sur le magnétomètre le champ

$$H'_b - H'_c.$$

On rapproche le système bobine-cerceau sans toucher à la bobine compensatrice qui reste fixe. Soit d la distance qui correspond à D pour laquelle la compensation

au lieu, on a pour tous les courants et par suite pour le courant unité :

$$H'_b. - H'_c. = h_a. \quad (2)$$

Des égalités (1) et (2) on tire :

$$(H_b. + H_c.)_D = (H'_b. - H'_c.)_d,$$

ou

$$H_{bob, D} - H'_{bob, d} + H_{cerc, D} + H'_{cerc, d} = 0. \quad (I)$$

En posant

$$B = \frac{2}{D^3} \left(\frac{1}{1 - \frac{\rho^2}{D^2}} \right)^2 \left[1 - \frac{3r^2}{4D^2} \frac{\Delta'^2 - \Delta^2}{\Delta' - \Delta} + \frac{5r^4}{8D^4} \frac{\Delta'^3 - \Delta^3}{\Delta' - \Delta} \right. \\ \left. - \frac{35}{64} \frac{r^6}{D^6} \frac{\Delta'^4 - \Delta^4}{\Delta' - \Delta} \right]$$

et b = la même expression dans laquelle D est remplacé par d , puis

$$C = \frac{2}{\rho^3} \left[1 + \frac{l^2}{2\rho^2} \left(\frac{5D^2}{\rho^2} - 1 \right) \right] \\ c = \frac{2}{\rho'^3} \left[1 + \frac{l^2}{2\rho'^2} \left(\frac{5d^2}{\rho'^2} - 1 \right) \right]$$

et enfin

$$\sigma = ns \text{ surface totale de la bobine,} \\ \Sigma = NS \text{ surface totale du cerceau,}$$

l'équation (1) devient

$$(B - b) \sigma + (C + c) \Sigma = 0 \\ \frac{\sigma}{\Sigma} = - \frac{C + c}{B - b} \quad \text{ou} \quad \frac{C + c}{b - B}. \quad (I)$$

RÉMARQUE. — Au lieu d'employer un champ auxiliaire h , on peut équilibrer directement l'effet magnétique de la bobine par l'effet magnétique du cerceau en

les disposant de part et d'autre à des distances convenables l et l' . Un même courant traverse les deux bobines et dans un sens tel, qu'elles regardent le magnétomètre par une face de même signe. Dans le cas contraire, le champ serait additif au lieu d'être différentiel. Lorsque l'on a réglé l et l' de manière que le spot reste fixe, que le courant circule ou soit interrompu, on a

$$H_b = H_c.$$

Comme le champ antagoniste est le champ terrestre proprement dit, on dispose la double règle dans la direction Est-Ouest. Si le magnétomètre est muni d'une règle unique portant des divisions, on place sur cette règle la bobine que l'on veut déplacer et on dispose l'autre à poste fixe de manière à n'avoir à évaluer qu'une seule distance. On répète les mesures :

- 1° Après avoir changé le sens du courant ;
- 2° Après retournement face pour face des bobines ;
- 3° Après une rotation de 180° autour de l'axe du magnétomètre.

Pour simplifier le calcul il est bon d'utiliser la plus grande distance en sensibilisant s'il le faut l'aiguille du magnétomètre. On rend ainsi négligeable l'influence de la longueur de l'aiguille du magnétomètre ainsi que les termes supérieurs qui figurent dans l'expression de H_b et de H_c .

Il ne faut pas sensibiliser au delà de l'approximation que l'on s'impose car on est alors inutilement gêné par les variations extérieures du champ magnétique.

On a trouvé pour le champ produit par le cerceau

$$H_c = \frac{2SN}{\rho^3} \left[1 + \frac{l^2}{2\rho^2} \left(\frac{5D^2}{2\rho^2} - 1 \right) \right]$$

et pour le champ de la bobine

$$H_b = \frac{2ns}{D^3} \left(1 - \frac{l^2}{D^2}\right)^{-2} \left[1 - \frac{3}{4} \frac{r^2}{D^2} \frac{(\Delta'^2 - \Delta^2)}{\Delta' - \Delta} + \frac{5}{8} \frac{r^4}{D^4} \frac{\Delta'^3 - \Delta^3}{\Delta' - \Delta} - \frac{35}{64} \frac{r^6}{D^6} \frac{\Delta'^4 - \Delta^4}{\Delta' - \Delta} \right]$$

ou

$$H_c = \frac{2SN}{\rho^3} [1 + \alpha] \quad \text{et} \quad H_b = \frac{2ns}{D^3} \left(1 - \frac{l^2}{D^2}\right)^{-2} [1 + \beta]$$

$$\frac{ns}{NS} = \frac{D^3}{\rho^3} \cdot \frac{1 + \alpha}{1 + \beta} \cdot \left(1 - \frac{l^2}{D^2}\right)^2$$

$$\frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{D^3}{\rho^3} \cdot \frac{1 + \alpha}{1 + \beta} \left(1 - \frac{l^2}{D^2}\right) \quad (11)$$

CHAPITRE VI

CALCUL D'UNE EXPÉRIENCE

1° CALCUL DE S. — J'indiquerai seulement le calcul de s relatif au dernier mode de comparaison.

On a :

$$H_c = \frac{2SN}{\rho^3} \left[1 + \frac{l^2}{2\rho^2} \left(\frac{5D^2}{\rho^2} - 1 \right) \right] \quad (1)$$

D = 49,557 cm internationaux.

Cette valeur est déduite d'une moyenne de dix pointés effectués au cathétomètre installé dans une position horizontale.

Dans d'autres expériences on a fait usage d'une machine à diviser dont le chariot était muni d'un viseur.

On a :

$$\begin{aligned} \rho^3 &= 196\,448 \\ 2SN &= 232\,071 \\ \frac{2SN}{\rho^3} &= 1,18133 \\ \frac{l^2}{2\rho^2} &= 1,21355 \times 10^{-4} \\ \frac{5D^2}{\rho^2} &= 3,6338 \\ H_c &= 1,1817. \end{aligned}$$

D'autre part

$$H_b = \frac{2ns}{D^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{l^2}{D^2}\right)^2} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{r^2}{D^2} \frac{\Delta'^2 - \Delta^2}{\Delta' - \Delta} + \frac{5}{8} \frac{r^4}{D^4} \frac{\Delta'^3 - \Delta^3}{\Delta' - \Delta} - \varepsilon \right].$$

La valeur D déduite de pointés effectués après retournement bout pour bout et huit fois face pour face, est :

$$D = 68,147 \text{ cm internationaux}$$

$$n = 1467; \quad l = 33,265.$$

Pour le calcul de la correction, on prendra $r = 4,931$.

On a :

$$\frac{2n}{D^3} = 0,009271$$

$$\left(1 - \frac{l^2}{D^2}\right)^{-2} = 1,7235$$

$$\frac{2n}{D^3} \left(1 - \frac{l^2}{D^2}\right)^{-2} = 0,015977$$

$$\Delta = \left(1 + \frac{l}{D}\right)^{-2} = 0,4516; \quad \Delta' = \left(1 - \frac{l}{D}\right)^{-2} = 3,8167$$

$$- \frac{3}{2} \frac{r^2}{D^2} (\Delta + \Delta') = - 0,033542$$

$$+ \frac{5}{8} \frac{r^4}{D^4} \frac{\Delta'^3 - \Delta^3}{\Delta' - \Delta} = + 0,000283.$$

D'où

$$H_b = s \times 0,015446,$$

par suite

$$s = 76,504.$$

L'équilibre rapidement réalisé persistait malgré les variations du courant et la sensibilité du magnétomètre était telle, qu'à un déplacement de 1 mm de la bobine,

correspondait sur la règle un déplacement du spot égal à 50 mm. Le courant utilisé était d'environ $1/2$ ampère.

Pour effectuer le centrage, on amenait les points de croisement des fils de trois réticules, définissant respectivement les centres des faces de la bobine et le centre du cerceau, au contact d'un fil fin bien tendu. Ce fil passait également par le milieu d'une très courte aiguille aimantée suspendue à un long fil de cocon. L'aiguille oscillait à l'intérieur d'un bloc de cuivre rouge amortisseur, et sa monture portait un miroir sphérique d'environ 4 m de rayon servant soit à mesurer les déviations, soit à constater l'équilibre : l'image du fil doit rester fixe sur la règle, lorsque le courant est supprimé ou rétabli. Si une pareille précision était nécessaire, on pourrait par cette méthode établir l'équilibre en observant l'image au microscope.

La moyenne de cinq mesures a donné pour la section s de la bobine à 17 degrés :

$$s = 76,495.$$

J'ai adopté dans les calculs qui suivent la section fournie par les mesures magnétiques qui tiennent compte de toutes les spires et de leur état, tandis que les pointés géométriques sont nécessairement limités à un certain nombre de sections et d'azimuths.

Valeur de L_m . — On a :

$$4L_m = 16\pi n_1 s \times 200 = 16\,956\,669,598.$$

2° CALCUL DE LA RÉSISTANCE K. — On emploie la formule :

$$R_1 = 4L_m \sqrt{\nu_1 \nu'_1} \sqrt{r_1 r'_1} \sqrt{(1 + \gamma_1)(1 + \gamma_2)} \times \frac{1}{f + b(1 - f)}$$

établie plus haut.

Le facteur L_m a été obtenu précédemment :

Détermination de ν_1 et ν'_1 . — On équilibre une première fois le galvanomètre en établissant le courant continu dans les bobines G_1 et on inscrit, sur le cylindre tournant à grande vitesse, les tours du moteur et les battements d'un pendule dont on vient de déterminer la période T . On équilibre une seconde fois en établissant le courant continu dans les bobines G_2 et on inscrit de même les tours du moteur et les battements du pendule.

En désignant par $N_1 + \varepsilon_1$ et par $N_2 + \varepsilon_2$ les angles de rotation du moteur estimés en tours relatifs aux deux équilibres et par p_1 et p_2 les nombres entiers des périodes correspondantes du pendule, on a :

$$\nu_1 = \frac{N_1 + \varepsilon_1}{p_1 T}; \quad \nu'_1 = \frac{N_2 + \varepsilon_2}{p_2 T}.$$

On compte directement N_1 et N_2 et on estime au cathétomètre les fractions $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Dans certains cas, on maintenait l'équilibre plusieurs minutes au moyen d'un frein (frein à ficelle, frein constitué par une tige plate reposant sur l'axe du moteur et le long de laquelle on déplace un poids..., etc.). On lisait directement au compte-tours, complété par un disque destiné à estimer la fraction, les nombres $N_1 + \varepsilon_1$ et $N_2 + \varepsilon_2$. Un chronomètre solidaire du compte-tours, mis en marche et arrêté en même temps que celui-ci, fournissait $p_1 T$ et $p_2 T$.

Détermination de r_1 et r_2 . — On a $r_1 = \frac{\mathfrak{R}}{R_2}$, $\mathfrak{R}$ est la résistance de l'ensemble du circuit relatif à la compensation et R_2 est la résistance du circuit induit. On compare respectivement ces résistances à celle de la boîte auxiliaire dont les bobines sont en série dans le premier cas et en parallèle dans le second.

On trouve

$$\frac{\mathfrak{R}}{B_s} = a; \quad \frac{\mathfrak{R}_2}{B_p} = b.$$

par suite

$$r_1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{B_s}{B_p}.$$

Au second équilibre correspond

$$r_2 = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{B_s}{B_p}.$$

Détermination de γ_1 et γ_2 . — On obtient γ_1 en comparant la résistance du galvanomètre G_1 à celle du shunt S_1 réglé pour le premier équilibre; γ_2 est le rapport de G_2 à S_2 qui correspond au second équilibre.

Le distributeur D permet d'effectuer très commodément les comparaisons qui conduisent aux valeurs de $r_1, r_2; \gamma_1, \gamma_2$, et du rapport $\lambda = \frac{K}{A+K}$ surtout lorsqu'on emploie la méthode potentiométrique.

Les ponts métalliques du distributeur servent aux mises en série successives des résistances à comparer et de la pile, des fiches mobiles servent aux prises de potentiel.

Détermination de f et de b . — La valeur de f a été obtenue par voie d'inscription : le commutateur, une pile et l'électro Desprez étant en série, on met le moteur

en marche; le stylet inscrit alors sur un cylindre dont la rotation est solidaire de celle de l'axe du commutateur, une courbe périodique qui fait connaître les durées relatives de fermeture et d'ouverture du courant inducteur et fournit de précieux renseignements sur le mode de fonctionnement des balais ou des contacts.

Pour déterminer b , j'ai employé la méthode du condensateur. J'ai aussi déduit b du rapport des différences de potentiel aux bornes du shunt S lorsque le circuit inducteur est ouvert, puis fermé. Le facteur correctif $\frac{1}{f + b(1-f)}$ étant très faible, il n'est pas nécessaire de le connaître avec une grande précision.

Disposition du calcul. — Série M. — 1° Les petites bobines constituent la partie active du circuit inducteur.

$$\nu_1 = 12,4967; \quad \nu'_1 = 12,5591.$$

$$\frac{\text{induit} + G_1}{B_p} = 1,038357.$$

$$\frac{\text{induit} + G_2}{B_p} = 1,040667.$$

$$\frac{S + G_1}{G_1} = 1,233568; \quad \frac{S + G_2}{G_2} = 1,25224.$$

$$\frac{K + A}{K} = 1,144343.$$

$$\frac{\text{compensateur total}}{B_s} = 1,072164.$$

Chacun des seconds membres est, en général, la moyenne de dix pointés.

Des rapports précédents on déduit

$$1 + \gamma_1 = 5,28141; \quad 1 + \gamma_2 = 4,9644.$$

Comme

$$\frac{B_s}{B_p} = 1\,025,511$$

on a

$$r_1 = \frac{\text{compensateur total}}{\text{induit} + G_1} = 1\,058,781;$$

$$r_2 = \frac{\text{compensateur total}}{\text{induit} + G_2} = 1\,056,4298$$

En conséquence

$$U = \sqrt{\nu_1 \nu'_1 \cdot r_1 r_2 (1 + \gamma_1) (1 + \gamma_2)} = 67\,843,706$$

$$R_1 = 4L_m U = 1\,150,403 \times 10^9$$

$$K = 0,87386 \times R_1 = 1\,005,296 \times 10^9.$$

2^e La grande bobine constitue la partie active du circuit inducteur

$$\nu_1 = 12,6098; \quad \nu'_1 = 12,4897$$

$$\frac{\text{induit} + G_1}{B_p} = 1,22258; \quad \frac{\text{induit} + G_2}{B_p} = 1,22403$$

$$\frac{S + G_1}{G_1} = 1,1,98372; \quad \frac{S + G_2}{G_2} = 1,215088$$

$$\frac{K + A'}{K} = 1,11168; \quad \frac{\text{compensateur total}}{B_s} = 1,07192.$$

Donc

$$1 + \gamma_1 = 6,04103; \quad 1 + \gamma_2 = 5,6492$$

$$r_1 = 899,236; \quad r_2 = 898,183$$

et

$$U' = \sqrt{\nu_1 \nu'_1 \cdot r_1 r_2 \cdot (1 + \gamma_1) (1 + \gamma_2)} = 65\,887,16.$$

Les valeurs de U et U' sont indépendantes de la température d'ensemble, car les rapports r et γ correspondent à des circuits formés d'un même métal.

On a ainsi

$$\begin{aligned} R'_1 &= 4L_m U' = 1\,117,227 \times 10^9 \\ K &= 0,89953. \quad R'_1 = 1\,004,984 \times 10^9 \\ \text{Moyenne } K &= 1\,005,140 \end{aligned}$$

Il faut multiplier maintenant cette valeur de K par le facteur correctif $\frac{1}{f+b(1-f)} = 0,9994$.

A 17° C.

$$\begin{aligned} K' &= 1\,004,537 \text{ ohms absolus.} \\ \text{Moyenne des séries M, Y, Z} \\ &1\,004,034 \quad 17^\circ. \end{aligned}$$

En comparant la résistance précédente à celle d'une boîte étalonnée en ohms internationaux à 17° j'ai trouvé

$$K' = 1\,003,225.$$

L'ohm déduit de ma mesure aurait donc pour expression en colonne de mercure 106,214.

CONCLUSIONS. — J'ai indiqué et appliqué une méthode de zéro permettant de mesurer en unités absolues une résistance *d'un ordre élevé*. Jusque-là les méthodes mises en œuvre ont eu généralement pour objet la mesure absolue d'une résistance de l'ordre de l'ohm.

La manipulation qui m'a conduit à une détermination directe du *kilohm* mettant à profit l'induction mutuelle (2) exige l'emploi d'un interrupteur périodique, mais tous les circuits sont fixes : le déplacement d'une bobine, s'effectuant dans des conditions définies, présente plus de difficultés.

Comme dans la méthode de détermination de l'ohm, due à M. Lippmann, et réalisée sous sa direction par M. Vuilleumier, tout se réduit à mesurer la section d'une bobine et une vitesse angulaire.

Il y a en plus une série de rapports à estimer ; cela rend la méthode laborieuse, mais ces nombres auxiliaires s'obtiennent avec une précision très supérieure à ceux qui mesurent la section de la bobine et la vitesse angulaire.

Le rapport des actions électromagnétiques des bobines du galvanomètre différentiel s'élimine, comme on l'a vu, par la répétition de la mesure après avoir permuté les rôles des bobines.

Il n'y a aucune déviation à observer.

Il est inutile d'employer un indicateur stroboscopique pour assurer la constance de la vitesse pendant l'équilibre, l'appareil lui-même permet de réaliser cette condition puisqu'elle est nécessaire à la fixité de l'équipage du galvanomètre.

En observant le spot au moyen d'un viseur placé près du moteur et faisant glisser un poids, sans le soulever, le long d'un levier plat prenant son appui sur l'axe du moteur, on maintient, avec un peu d'habitude, le spot sur le réticule de la lunette. Il serait préférable — et c'est le problème auquel je m'applique en ce moment — de disposer d'une régulation précise et automatique du moteur. L'enregistrement ou l'inscription des tours pourrait avoir alors une longue durée.

Au cours de ces recherches j'ai été conduit à construire : 1° un kilohm ; 2° une résistance de 200 000 ohms environ, formée de 32 bobines montées de façon à pouvoir être groupées à volonté ; 3° un grand cerceau destiné à servir de surface étalon dans les comparaisons magnétiques ; 4° 7 bobines B aussi parfaites que possible ; 5° un commutateur à neuf touches excentriques se prêtant aux combinaisons de coupure et d'établissement que l'on désire, sans permettre aux touches de

vibrer ; 7° un pendule de M. Lippmann à entretien électrique qui fonctionne sans discontinuité depuis plus d'un an ⁽¹⁾.

En comparant la résistance absolue que j'ai mesurée à la bobine marquée 1000 d'une boîte Carpentier (3—5939), non encore mise en service, j'ai été conduit au résultat suivant :

A 17° la résistance étudiée vaut 1003,225 ohms internationaux de la boîte Carpentier. Si l'ohm dont la boîte Carpentier dérive correspond à 106,3 en colonne de mercure, celui du kilohm correspond à 106,214 cm.

On pourrait perfectionner l'application de la méthode en employant une bobine inductrice construite dans d'autres conditions et un régulateur automatique sensible.

Je remercie mon illustre maître, M. Lippmann, des conseils précieux qu'il m'a donnés et de l'extrême bienveillance qu'il lui a plu de me témoigner au cours de ce travail.

Je remercie M. G. Maneuvrier, qui m'a très obligeamment prêté quelques-uns de ses appareils, et M. Limb qui a bien voulu concourir à mes essais.

(1) Mon frère Victor Guillet m'a beaucoup aidé dans la construction de ces divers appareils.

SECONDE THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

ÉTUDE DES GAZ
QUI CONSTITUENT L'ATMOSPÈRE

Vu et approuvé :

Paris, le 14 juin 1899,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 14 juin 1899,

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GRÉARD.

